This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

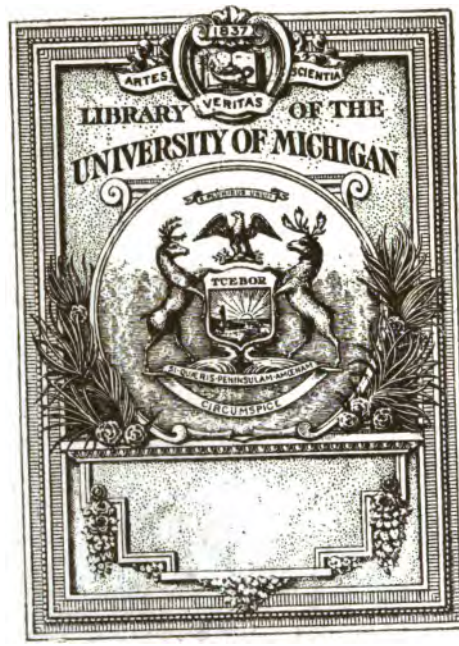
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

4 5.20
4 3.50
K
1578



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
831
.S36

Die Grundlehren

der

Statik fester Körper.

Mit einer Sammlung von 287 größtentheils vollständig gelöſ'ten Aufgaben;

für

höhere Lehranſtalten, angehende Mathematiker und Techniker,

einfach und leichtfaßlich entwickelt;

von

Dr. C. H. Schnuſe.

Mit 175 in den Text gedruckten Holzſchnitten.

Leipzig,
Verlag von Friedrich Fleiſcher.
1851.

Stacks
Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-12-1923

Vorwort.

Es war anfangs blos meine Absicht: eine systematisch geordnete Sammlung von Aufgaben über die verschiedenen Zweige der gesammten Mechanik herauszugeben, weil eine solche in der deutschen Literatur, soviel ich weiß, noch nicht existirt, ungeachtet der hohen Wichtigkeit, welche die selbständige Lösung passender Aufgaben für den Lernenden hat. — Schon Newton hat gesagt: **exempla plus prosunt quam praecepta,“** und ebenso Baco: **„Examples give a quicker impression than arguments.“** In der That weiß jeder erfahrene Lehrer: daß durch die Auflösung instructiver Probleme dem Anfänger die allgemeinen Grundlehren der Wissenschaft erst recht klar und geläufig gemacht werden. — Da ich aber bei dieser bloßen Sammlung von Aufgaben oft auf andere Lehrbücher der Mechanik hätte ver-

417672

weisen müssen, so habe ich es für zweckmäßiger gehalten: auch die allgemeinen Grundlehren in möglichster Kürze mit aufzunehmen. — Auf diese Weise bekommt das Werk mehr Selbständigkeit — und kann zugleich als Lehr- und Uebungsbuch dienen. — Das ganze Werk wird aus drei Theilen bestehen, wovon der erste die Statik, der zweite die Mechanik und der dritte die Maschinenlehre behandelt, indem jeder Theil in zwei Abtheilungen zerfällt, wovon die erste immer die allgemeinen Grundlehren und die zweite eine Sammlung von Aufgaben enthält, welche sich auf jene Grundlehren beziehen, und zur Erläuterung derselben dienen sollen. —

Was den Gebrauch des Werkes anlangt, so braucht wohl kaum bemerkt zu werden: daß man nicht erst die Grundlehren ganz und dann die Aufgaben, sondern beide in passender Verbindung durchnehmen muß. —

Bei der Entwickelung der erstern habe ich möglichst nach Einfachheit, Klarheit und Darlegung der allein objektiv wahren Gründe gestrebt. — So ist z. B. das Princip des Parallelogrammes der Kräfte aus seinem allein wahren Grunde, nämlich der erfahrungsmäßigen gegenseitigen Unabhängigkeit mehrerer auf denselben materiellen Punkt wirkender Kräfte abgeleitet. — Alle sogenannten rein analytischen oder geometrischen Beweise des Parallelogrammes der Kräfte — selbst die von Bernoulli, Poisson, u. s. w. — sind ganz illusorisch. — Denn wenn man n gleiche Kräfte p nach derselben Richtung und in demselben Sinne auf einen materiellen Punkt wirken läßt; so

ist nicht a priori klar, daß eine einzige Kraft P, welche den n Kräften p das Gleichgewicht hält, auch das $n$fache der Kraft p ist, oder allgemein: daß die Resultante zweier oder mehrerer nach derselben Richtung und in demselben Sinne auf denselben materiellen Punkt wirkender Kräfte P, Q, R, ... ihrer Summe $P + Q + R + \ldots$ gleich ist. — Zu diesem Schlusse ist man nur berechtigt, wenn man schon weiß: daß die Kräfte unabhängig von einander bleiben, und jede gerade so wirkt, als wenn sie allein wäre (§. 8.), was nur die Erfahrung lehren, aber nicht a priori bewiesen werden kann, so wenig als das Newton'sche Gravitationsgesetz, das Mariotte'sche Gesetz, u. s. w. — Wenn man aber die gegenseitige Unabhängigkeit mehrerer auf denselben materiellen Punkt wirkenden Kräfte kennt, so ergibt sich das Princip des Parallelogrammes der Kräfte von selbst (§. 11.) und es bedarf keiner weitläufigen analytischen oder geometrischen Beweise. —

Da ohne Anwendung der höhern Analysis in den mechanischen Wissenschaften nichts Gründliches und Gediegenes geleistet werden kann, so wird man es natürlich und gerechtfertigt finden: daß ich mich dieses kräftigen Hülfsmittels überall ohne Bedenken bedient habe, wo sich Gelegenheit dazu darbot — um so mehr, da sich jeder angehende Mathematiker und Techniker die zum Studium der Mechanik nöthigen Lehren der höhern Analysis aus meinem „Grundlehren der höhern Analysis, u. s. w." (Braunschweig 1849) in kurzer Zeit und mit der größten Leichtigkeit zu eigen machen kann, während die gewöhnlichen Surrogate in unerträg-

liche Weitläufigkeiten führen und bei Lichte beſehen doch weiter nichts, als eine gänzlich entſtellte Differenzial- und Integralrechnung ſind. —

Heidelberg 1850.

Dr. Schnuſe.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Grundlehren.

	§§.	Seite
Einleitung	1—10	1— 5
Parallelogramm der Kräfte — Gleichgewichtsbedingungen, ꝛc.	11—55	6— 46
Arbeit — Princip der virtuellen Geschwindigkeiten	56—60	46— 54
Mittelpunkte paralleler Kräfte — Schwerpunkt	61—68	54— 60
Guldin's Regeln	69	60— 61
Seilpolygon — Kettenlinie	70—84	61— 82
Reibung	85	82— 84

Zweite Abtheilung.

Aufgaben.

Einleitung	85— 86
Aufgabe 1—287	86—264

Statik.

Erste Abtheilung.

Grundlehren.

Einleitung.

§. 1. Materie. — Der Raum an sich — der leere Raum — ist nach allen Richtungen durchdringlich, so daß man sich in einem bestimmten endlichen Raume zugleich einen andern denken kann, welcher den ersten gleichsam durchdringt. Wenn aber die beiden Räume einander nicht durchdringen können, wie solches der Erfahrung gemäß der Fall sein kann; so sagt man: sie seien mit Materie erfüllt, so daß also die Materie das Undurchdringliche im Raume oder dasjenige ist, was den Raum undurchdringlich macht.

§. 2. Körper. — Ein mit Materie erfüllter, allseitig begrenzter endlicher Raum heißt ein Körper, dieser Raum an sich das Volumen des Körpers, und die darin enthaltene Menge Materie die Masse des Körpers.

§. 3. Dichtigkeit. — Da aber die Erfahrung lehrt: daß das Volumen jedes Körpers verkleinert werden kann, ohne seine Masse zu vermindern, so folgt: daß die Materie den Raum nicht stetig erfüllt, sondern daß die kleinsten Theilchen der Materie — Atome — materiellen Punkte — welche den von ihnen eingenommenen Raum als stetig erfüllend gedacht werden, größere oder kleinere Zwischenräume zwischen sich lassen, so daß also Kör-

per von sehr verschiedenem Volumen gleiche Mengen Materie, oder Körper von gleichem Volumen verschiedene Mengen Materie enthalten können, woraus der Begriff der Dichtigkeit der Körper entspringt. Je näher die Atome einander sind, desto größer ist die Dichtigkeit des Körpers. — Wenn die gegenseitige Entfernung der Atome eines Körpers überall dieselbe ist, so ist auch seine Dichtigkeit an allen Stellen seines Volumens dieselbe, und der Körper oder seine Masse heißt homogen. — Die Dichtigkeit eines homogenen Körpers kann folglich durch das Verhältniß seiner Masse zu seinem Volumen, oder durch die in der Volumeneinheit enthaltene Menge Materie gemessen oder ausgedrückt werden. —

Ist dagegen der gegenseitige Abstand der Atome eines Körpers an den verschiedenen Stellen seines Volumens verschieden, so heißt der Körper oder seine Masse heterogen, dessen Dichtigkeit also ebenfalls an den verschiedenen Stellen seines Volumens verschieden ist. —

§. 4. Bewegung. — Die Erfahrung lehrt: daß die Materie beweglich ist; d. h., daß jeder Körper successive verschiedene Oerter oder Lagen im Raume annehmen oder sich bewegen kann. — Wir erkennen diesen Zustand der Bewegung eines Körpers daran: daß sich seine Entfernung von andern als fest oder unbeweglich betrachteten Körpern oder Punkten ändert. — Wären diese letzten Körper oder Punkte wirklich absolut fest, so wäre die Bewegung des betrachteten Körpers eine absolute; befinden sich aber die als fest betrachteten Körper oder Punkte selbst in Bewegung, so ist die Bewegung jenes Körpers nur eine relative. — Soweit aber unsere Erfahrung reicht, gibt es keinen absolut festen oder ruhenden Körper oder Punkt; folglich sind alle Bewegungen, welche wir beobachten und untersuchen können, nur relative. — Wenn ein System von mehrern Körpern eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und es ändert sich blos die Lage eines dieser Körper gegen die übrigen, während diese dieselbe gegenseitige Lage behalten; so schließen wir: daß sich der eine Körper in einer relativen Bewegung befindet, während sich die übrigen Körper in einer relativen Ruhe befinden. — Solche relative Ruhe und Bewegung beobachten wir namentlich auf der Oberfläche der Erde, welche sich bekanntlich im Raume fortbewegt. —

§. 5. Gegenseitige Unabhängigkeit gleichzeitiger Bewegungen. — Die Erfahrung lehrt ferner: daß die relative Bewegung eines Körpers, welcher zu einem Systeme von Körpern gehört, die eine gemeinschaftliche Bewegung haben, ganz ebenso erfolgt, als wenn sich das ganze System in Ruhe befände — d. h. die relative Bewegung des fraglichen Körpers ist von der Bewegung des ganzen Systemes völlig unabhängig. —

Wenn also demselben Körper zwei Bewegungen zugleich ertheilt werden, so sind beide ganz unabhängig von einander.

§. 6. Trägheit. — Die Erfahrung lehrt auch: daß die Bewegung eines Körpers niemals durch seine eigene Materie bewirkt oder verändert wird, sondern, daß beides stets von äußern (fremden) Ursachen herrührt. — Diese Unfähigkeit der Materie: von selbst aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzugehen, oder letztere zu verändern, wird die Trägheit oder das Beharrungsvermögen der Materie genannt, weil der Körper ein Bestreben hat, in dem Zustande zu bleiben, worin er sich einmal befindet. —

§. 7. Kraft. — Jede Ursache, welche Bewegung erzeugt, oder zu erzeugen strebt, heißt Kraft, wobei aber blos die Wirkung dieser Kraft und nicht ihr Wesen in Betracht kommt, so daß Kräfte von noch so verschiedener Natur als gleich betrachtet werden, wenn sie demselben Körper dieselbe Bewegung ertheilen, oder zu ertheilen streben, oder überall dieselbe Wirkung hervorbringen. —

Bei jeder Kraft kommt zunächst dreierlei in Betracht, nämlich 1) der materielle Punkt, auf welchen sie unmittelbar wirkt, d. h. ihr Angriffspunkt; 2) die Richtung, nach welcher sie wirkt, d. h. nach welcher sie den Angriffspunkt bewegt, oder zu bewegen strebt, und 3) ihre Intensität oder Stärke.

Eine Kraft wirkt entweder nur während eines unmeßbar kurzen Zeitraumes (Augenblickes), oder fortwährend und stetig auf einen Körper oder materiellen Punkt. — Im ersten Falle heißt sie eine augenblickliche (momentane), und im zweiten eine stetige (continuirliche) Kraft.

Eine momentane Kraft (z. B. ein Stoß) ertheilt dem Körper oder materiellen Punkte eine gleichförmige geradlinige Bewegung, d. h. er bewegt sich stets nach der Richtung der geraden Linie,

welche die Richtung der Kraft darstellt, und zwar so, daß er in beliebig kleinen gleichen Zeiten stets gleiche Längen durchläuft, so daß folglich auch die in gleichen endlichen Zeiten, z. B. in der Zeiteinheit (Sekunde) durchlaufenen Längen immer einander gleich sind. — Das Verhältniß der durchlaufenen Länge zu der dazu gebrauchten Zeit, oder die in der Zeiteinheit durchlaufene Länge ist folglich constant und wird die Geschwindigkeit der Bewegung genannt. Denn der Körper oder materielle Punkt kann vermöge seiner Trägheit weder die Richtung, noch die Geschwindigkeit der ihm von der momentanen Kraft ertheilten Bewegung von selbst ändern. —

Wenn also s die durchlaufene Länge, t die dazu gebrauchte Zeit und c die constante Geschwindigkeit bezeichnet; so hat man für jede gleichförmige Bewegung die Relation:

$$\frac{s}{t} = c \text{ oder } s = c.t.$$

§. 8. Wenn mehrere momentane Kräfte gleichzeitig auf denselben materiellen Punkt wirken, so folgt aus §. 5., daß sie unabhängig von einander bleiben, d. h. keine die andere in ihrer Wirkung stört, jede also ihre volle Wirkung thut, gerade so, als wenn sie allein auf den materiellen Punkt wirkte. — Wenn also gleichzeitig n gleiche momentane Kräfte nach derselben Richtung und in demselben Sinne auf denselben materiellen Punkt wirken, so ertheilen sie zusammengenommen dem materiellen Punkte eine gleichförmige geradlinige Bewegung, deren Geschwindigkeit $= nc$ ist, wenn c die einer dieser Kräfte entsprechende Geschwindigkeit bezeichnet. — Die Geschwindigkeiten, und folglich auch die in gleichen Zeiten durchlaufenen Längen, verhalten sich also wie die Kräfte, und können mithin als Maß der Kräfte dienen. —

Hieraus erhellet auch, was man unter einem beliebigen Vielfachen einer Kraft zu verstehen hat, und wie Kräfte unter sich verglichen oder durch Zahlen ausgedrückt werden können, sobald man eine bestimmte Kraft als Einheit annimmt. —

§. 9. Wenn eine stetige Kraft von unveränderlicher Stärke auf einen materiellen Punkt wirkt, so kann man sich diese stetige Wirkung als eine Reihe von momentanen Einwirkungen (Stö-

ßen) vorstellen, welche nach unendlich kleinen Zeitintervallen succeſſive erfolgen. Die Geſchwindigkeit des materiellen Punktes nimmt folglich der Zeit proportional zu, weil die durch eine momentane Kraft erzeugte Geſchwindigkeit dieſelbe bleibt, der materielle Punkt mag ſich in Ruhe, oder bereits in Bewegung befinden (§. 5.). — Bezeichnet alſo g die in der Zeiteinheit und c die in der Zeit t durch die ſtetige Kraft erzeugte Geſchwindigkeit, ſo hat man:

$$c = gt.$$

Um ferner die in der Zeit t durchlaufene Länge s zu erhalten, braucht mau nur zu bemerken: daß ſie dieſelbe iſt, als wenn der materielle Punkt während der ganzen Zeit t die conſtante Geſchwindigkeit:

$$\frac{o + c}{2} = \tfrac{1}{2}\, c = \tfrac{1}{2}\, gt$$

gehabt hätte, weil man für die während der Zeit t von o bis c gleichförmig zunehmende Geſchwindigkeit offenbar die mittlere conſtante Geſchwindigkeit $\frac{1}{2}\, c = \frac{1}{2}\, gt$ nehmen kann. — Es iſt folglich:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c.\, t = \tfrac{1}{2}\, g,\, t^2.$$

Wäre die ſtetige Kraft, d. h. jeder der ſucceſſiven Impulſe oder Stöße n mal ſtärker, ſo wäre offenbar:

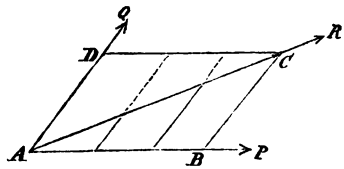
$$c = ngt \text{ und } s = \tfrac{1}{2}\, (ng)\, t^2,$$

d. h. auch unveränderliche ſtetige Kräfte verhalten ſich wie die demſelben materiellen Punkte in **gleichen** Zeiten ertheilten Geſchwindigkeiten, oder wie die in gleichen Zeiten von dieſem Punkte durchlaufenen Längen; und folglich können dieſe Geſchwindigkeiten und Längen als Maß ſolcher Kräfte dienen.

§. 10. Aus §§. 8. und 9. erhellet: daß momentane und unveränderliche ſtetige Kräfte vollſtändig durch gerade Linien dargeſtellt werden können, deren Anfangspunkte die Angriffspunkte, deren Richtungen die Richtungen und deren Längen die Intenſitäten dieſer Kräfte darſtellen. — Wir werden von dieſer Darſtellungsweiſe der Kräfte in der Folge häufig Gebrauch machen.

Parellelogramm der Kräfte — Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte — Bedingungen des Gleichgewichtes.

§. 11. Wenn auf denselben materiellen Punkt A gleichzeitig zwei Kräfte P, Q wirken, welche der Stärke und Richtung nach durch die beiden geraden Linien AB, AC dargestellt werden (§. 10.); so sind die diesem Punkte ertheilten Bewegungen unabhängig von einander (§. 5), folglich auch die beiden Kräfte; d. h. jede thut ihre volle Wirkung, gerade so, als wenn sie allein auf den materiellen Punkt A wirkte (§. 8.). Man kann sich also vorstellen: daß sich der materielle Punkt A vermöge der Wirkung der Kraft Q gleichförmig in der Richtung AQ fortbewegt und daß die gerade Linie AQ zu gleicher Zeit längs AP fortrückt, indem sie stets zu sich selbst parallel bleibt und die Geschwindigkeiten beider Bewegungen sich wie $AD : AB$ verhalten. — Offenbar durchläuft alsdann der materielle Punkt A die Diagonale AC des aus den die Kräfte Q, P darstellenden geraden Linien AD, AB construirten Parallelogrammes $ABCD$ in derselben Zeit, in welcher er sich vermöge der alleinigen Wirkung der Kräfte Q und P resp. durch die Seiten AD, AB desselben Parallelogrammes bewegen würde. — Die Diagonale AC stellt also die Kraft R der Richtung und Stärke nach dar, welche allein dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die beiden Kräfte Q, P zusammengenommen. Hierin besteht das Princip oder der Lehrsatz des Parallelogrammes der Kräfte. — Die Kraft R heißt die Resultante oder Mittelkraft aus den beiden Kräften P, Q, während diese die Componenten oder Seitenkräfte jener genannt werden.



Die drei Kräfte P, Q und R stehen also hinsichtlich ihrer Stärke und Richtung in denselben Beziehungen zu einander, wie die drei Seiten und Winkel des Dreieckes ABC, und es ist z. B.:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P.\,Q\cos(P, Q)}, \quad (\alpha)$$

$$\sin(P, R) = \frac{Q}{R}\sin(P, Q),$$

wodurch die Stärke und Richtung der Resultante R bestimmt ist. Hierin besteht die Zusammensetzung der Kräfte.

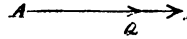
Umgekehrt kann man immer eine Kraft R in zwei andere Kräfte P, Q zerlegen, welche nach gegebenen Richtungen AP, AQ wirken; denn man hat offenbar:

$$R : P = \sin(P, Q) : \sin(Q, R), \quad P = \frac{R \cdot \sin(Q, R)}{\sin(P, Q)},$$

$$R : Q = \sin(P, Q) : \sin(P, R), \quad Q = \frac{R \cdot \sin(P, R)}{\sin(P, Q)}.$$

Sowohl die Zusammensetzung, wie die Zerlegung der Kräfte wird in Zukunft oft erforderlich sein. —

Wenn der Winkel $(P, Q) = 0$, also $\cos(P, Q) = 1$ ist

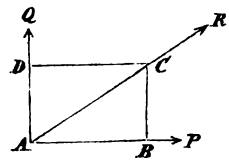


so folgt aus (α):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P \cdot Q} = P + Q,$$

übereinstimmend mit §. 8.

Wenn der Winkel $(P, Q) = 90^0$, also $\cos(P, Q) = 0$ ist,



so folgt aus (α):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

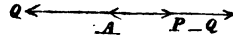
was auch leicht direkt erhellet, weil offenbar:

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

und:

$$\operatorname{tang}(P, R) = \frac{BC}{AB} = \frac{Q}{P}.$$

Wenn der Winkel $(P, Q) = 180^0$, also $\cos(P, Q) = -1$ ist,



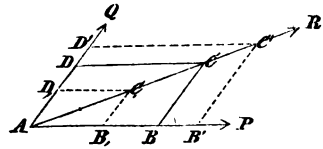
so folgt aus (α):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,P\,Q} = P - Q,$$

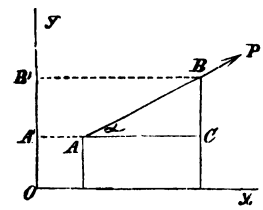
und wenn zugleich $P = Q$ ist, so ist $R = 0$; d. h. wenn zwei Kräfte auf denselben materiellen Punkt nach direkt entgegengesetzten Richtungen wirken, so ist ihre Resultante gleich der Differenz derselben und wirkt nach der Richtung (in dem Sinne) der

größern, und wenn beide einander gleich sind, so ist ihre Resultante = 0 oder beide Kräfte halten einander das Gleichgewicht. —

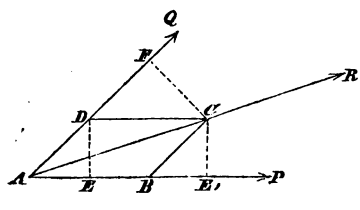
§. 12. Wenn die beiden Kräfte P, Q bei unveränderter Richtung in dem Verhältnisse $1 : n$ zu- oder abnehmen, so nimmt die Resultante R in demselben Verhältnisse zu, oder ab. —



§. 13. Oft hat man auch die Wirkung einer Kraft, d. h. die von ihr hervorgebrachte Bewegung oder Geschwindigkeit nach einer andern, als nach ihrer eigenen Richtung zu schätzen. — Wenn z. B. eine Kraft P den materiellen Punkt A nach ihrer eigenen Richtung in der Zeiteinheit durch die Länge AB bewegt, so kann gefragt werden, wie weit sie diesen Punkt in irgend einer andern Richtung Ox fortbewegt, d. h. weiter von der auf Ox senkrechten geraden Linie Oy entfernt hat? — Die anfängliche Entfernung des Punktes A von Oy ist $= A'A$ und seine Entfernung nach Verlauf der Zeiteinheit ist $= B'B = A'C$; folglich die Zunahme seiner Entfernung von $Oy = A'C - AC = AC = AB.\ cos\ \alpha$, d. h. gleich der Projektion von AB auf $A'C$ oder Ox.

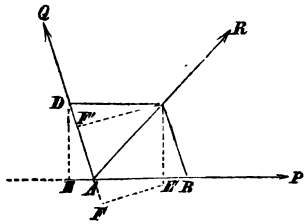


§. 14. Hiernach läßt sich nun leicht beurtheilen, ob und um wie viel jede der beiden Kräfte P, Q die Bewegung (Geschwindigkeit) des materiellen Punktes A nach der Richtung der andern Kraft vergrößert, oder verkleinert. —

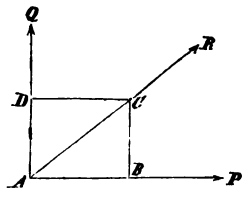


1) Ist der Winkel (P, Q) ein spitzer, so wird z. B. die Bewegung oder Geschwindigkeit des materiellen Punktes A nach der Richtung der Kraft P durch die Kraft Q um $AE = BE' = Q\ cos\ (P, Q)$ vergrößert; und ebenso wird die Bewegung oder Geschwindigkeit des Punktes A

nach der Richtung der Kraft Q durch die Kraft P um $DF = P \cos(P, Q)$ vergrößert. —

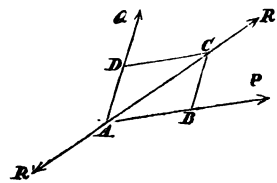


2) Ist dagegen der Winkel (P, Q) ein stumpfer, so wird die Bewegung oder Geschwindigkeit des materiellen Punktes A nach der Richtung der Kraft P durch die Kraft Q um $AE = BE' = Q \cos(P, Q)$ und die nach der Richtung der Kraft Q durch die Kraft P um $AF = DF = P \cos(P, Q)$ verkleinert. —



3) Ist endlich der Winkel (P, Q) ein rechter, so hat die Kraft Q auf die Bewegung oder Geschwindigkeit des materiellen Punktes A nach der Richtung der Kraft P, so wie die Kraft P auf die nach der Richtung der Kraft Q gar keinen Einfluß. — Hierin liegt der Grund, weshalb wir in Zukunft oft Kräfte nach zwei oder drei auf einander senkrechten Richtungen zerlegen werden. —

Dieselben Resultate erhält man, wenn man die Resultante R auf die Richtungen der Kräfte P, Q projicirt. —



§. 15. Wenn man zu den beiden Kräften P, Q eine dritte R' hinzufügt, welche ihrer Resultante R gleich und direkt entgegengesetzt ist, so wird nach §. 11 die Resultante aus R und R', also auch die aus P, Q, $R' = 0$, und folglich bleibt der materielle Punkt A unter der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte P, Q, R' in Ruhe. Man sagt alsdann: die drei Kräfte P, Q, R' seien im Gleichgewichte oder halten einander das Gleichgewicht. — Die Kräfte P, Q, R' erscheinen alsdann als Druckkräfte, welche den materiellen Punkt A nach ihren resp. Richtungen zu bewegen streben; aber die bisher zwischen den Richtungen und Intensitäten der Kräfte P, Q und R gefundenen Relationen bleiben offenbar dieselben, P, Q und R mögen als bewegende, oder blos als Druckkräfte gedacht werden; denn die Druckkräfte gehen in bewegende Kräfte über, sobald der materielle Punkt

A ihrer Wirkung folgen kann — und umgekehrt: die bewegenden Kräfte gehen in Druckkräfte über, sobald die Bewegung verhindert wird — oder vielmehr: die bewegenden Kräfte sind in der That nichts anders als Druckkräfte. —

Wir werden hier die Kräfte vorzugsweise nur als Druckkräfte zu betrachten haben, weil es sich hauptsächlich darum handeln wird: die Bedingungen aufzustellen, welche gegebene Kräfte hinsichtlich ihrer Angriffspunkte, Richtungen und Intensitäten erfüllen müssen, wenn sie im Gleichgewichte sein sollen. —

Die Wissenschaft, welche sich mit den dahin gehörigen Untersuchungen beschäftigt, wird „Statik" genannt. —

Da sich die Statik nur mit Druckkräften beschäftigt, so hat man geglaubt, auch das Princip des Parallelogrammes der Kräfte ohne Betrachtung von Bewegung begründen zu müssen, wodurch eine Menge sogenannter geometrischer und analytischer Beweise dieses Principes entstanden sind, welche jedoch alle nichts beweisen. — Der objective Grund des Princips ist kein anderer, als der der gegenseitigen Unabhängigkeit gleichzeitig wirkender Kräfte oder gleichzeitig stattfindender Bewegungen. — Ohne den Begriff der Bewegung würde man auch nicht einmal wissen können: daß es eine Resultante geben muß. —

§. 16. Wenn die drei Kräfte P, Q, R' im Gleichgewichte sind, so ist offenbar jede derselben der Resultante aus den beiden andern gleich und direkt entgegengesetzt. Es liegen folglich alle drei Kräfte in derselben Ebene, und es verhält sich:

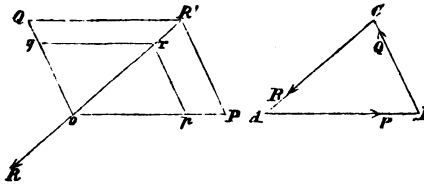
$$\begin{aligned} P:\ Q:\ R' &= AB:\ BC:\ AC \\ &= \sin ACB:\ \sin BAC:\ \sin ABC: \\ &= \sin QAR':\ \sin PAR':\ \sin PAQ \\ &= \sin (Q,\ R'):\ \sin (P,\ R'):\ \sin (P,\ Q), \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{P}{\sin (Q,\ R')} = \frac{Q}{\sin (P,\ R')} = \frac{R'}{\sin (P,\ Q)}.$$

Wie lautet der hierin liegende Lehrsatz in Worten?

§. 17. Wenn man drei Kräfte P, Q, R, welche nach Größe und Richtung durch die drei Seiten AB, BC, CA eines



Dreieckes ABC dargestellt werden, in unveränderter Richtung und Stärke auf denselben materiellen Punkt O wirken läßt; so halten sie einander das Gleichgewicht — und umgekehrt: wenn die drei Seiten eines Dreieckes ABC resp. zu den Richtungen OP, OQ, OR dreier auf denselben materiellen Punkt O wirkender und einander das Gleichgewicht haltender Kräfte P, Q, R parallel sind; so verhalten sich die Seiten des Dreieckes wie diese Kräfte, und können folglich diese Kräfte nach Größe und Richtung darstellen. —

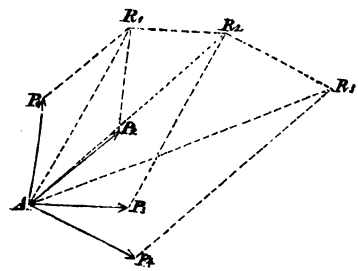
1) Denn zieht man durch den Punkt O die drei geraden Linien OP, OQ, OR resp. gleich und parallel den drei Seiten AB, BC, CA des Dreieckes ABC und construirt das Parallelogramm $OPR'Q$, so ist OR' die Resultante aus P und Q, welche der Kraft R offenbar gleich und direkt entgegengesetzt ist, weil Dreieck $OPR' = ABC$ ist, da $OP = AB$, $OQ = BC = PR'$ und $\angle P = \angle B$ gemacht ist. —

2) Denn nimmt man auf der Richtung OP eine Länge Op, welche die Kraft P darstellen soll, und zieht pr parallel zu OQ, so wie rq parallel zu OP; so verhält sich:

$$Op : pr : Or = OP : PR' : OR'$$
$$= AB : BC : CA,$$

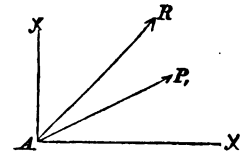
d. h.
$$P : Q : R = AB : BC : CA.$$

§. 18. Wenn in derselben Ebene n Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n nach verschiedenen Richtungen auf einen materiellen Punkt A wirken, so kann man ihre Resultante leicht durch Construction finden, wenn man nach §. 11. erst die Resultante R_1 von P_1 und P_2 sucht, hierauf die Resultante R_2 von R_1 und P_3, dann die Resultante R_3 von R_2 und P_4, u. s. f., was darauf hinausläuft: daß man durch den Punkt P_1 die Linie $P_1 R_1$ gleich und parallel AP_2, durch R_1 die Linie $R_1 R_2$ gleich und parallel AP_3,



durch R_2 die Linie $R_2 R_3$ gleich und parallel $A P_4$, u. ſ. f. zieht. Alsdann iſt die Verbindungslinie des Punktes R_{n-1} mit dem Punkte A die geſuchte Reſultante, und wenn der Punkt R_{n-1} mit dem Punkte A zuſammenfällt; ſo iſt dieſe Reſultante $= 0$, mithin ſind die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ im Gleichgewichte. —

Man kann die Reſultante R der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ auch leicht durch Rechnung finden. Denn wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ und Θ reſp. die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ und R mit Ax bilden, und man zerlegt



jede dieſer Kräfte nach den beiden auf einander ſenkrechten Axen Ax, Ay (§. 11.); ſo erhält man:

$$R \cos \Theta = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cos \alpha_n,$$
$$R \sin \Theta = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \ldots + P_n \sin \alpha_n,$$

oder:

$$R \cos \Theta = \Sigma. P \cos \alpha = \Sigma. X,$$
$$R \sin \Theta = \Sigma. P \sin \alpha = \Sigma. Y,$$

folglich:

$$R^2 = (\Sigma. P \cos \alpha)^2 + (\Sigma. P \sin \alpha)^2$$
$$= (\Sigma. X)^2 + (\Sigma. Y)^2,$$

alſo:

$$R = \sqrt{(\Sigma. P \cos \alpha)^2 + (\Sigma. P \sin \alpha)^2}$$
$$= \sqrt{(\Sigma. X)^2 + (\Sigma. Y)^2}$$

und:

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{\Sigma. P \sin \alpha}{\Sigma. P \cos \alpha} = \frac{\Sigma. Y}{\Sigma. X},$$

ſo daß jetzt die Stärke und Richtung der geſuchten Reſultante R bekannt iſt. —

Wenn die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte ſein ſollen, ſo muß ſein:

$$R = 0,$$

d. h.:

$$(\Sigma. P \cos \alpha)^2 + (\Sigma. P \sin \alpha)^2 = 0,$$

oder:

$$(\Sigma. X)^2 + (\Sigma. Y)^2 = 0,$$

also:

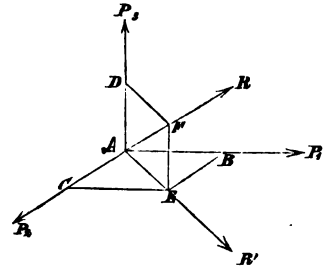
$$\Sigma.\ P\cos\alpha = \Sigma.\ X = 0 \text{ und } \Sigma.\ P\sin\alpha = \Sigma.\ Y = 0, \quad (\beta)$$

was auch nach §. 14., 3 der Fall sein muß. —

Wie lauten die durch die Gleichungen (β) ausgedrückten Gleichgewichtsbedingungen in Worten? —

§. 19. Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n nicht in derselben Ebene liegen, sondern eine beliebige Richtung im Raume haben, so ist die obige geometrische Construction der Resultante offenbar noch anwendbar. —

Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3 nach drei auf einander senkrechten Richtungen AP_1, AP_2, AP_3 auf den materiellen Punkt



A wirken, und der Größe nach durch AB, AC, AD dargestellt werden; so ist offenbar:

$$AF = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2},$$

d. h.

$$R = \sqrt{P_3^2 + R'^2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch durch Rechnung; denn wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Resultante R mit den Richtungen der drei Kräfte P_1, P_2, P_3 bildet; so ist offenbar:

$$\begin{aligned} P_1 &= R\cos\alpha, \\ P_2 &= R\cos\beta, \quad (\delta) \\ P_3 &= R\cos\gamma, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 &= R^2\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma), \\ &= R^2, \text{*)} \end{aligned}$$

*) Denn wenn man die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums = 1 setzt, so sind die drei zusammenstoßenden Kanten desselben offenbar die Cosinus der Winkel, welche sie mit der Diagonale bilden. —

folglich:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2},$$

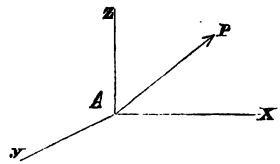
und aus (δ):

$$\cos\alpha = \frac{P_1}{R},\ \cos\beta = \frac{P_2}{R},\ \cos\gamma = \frac{P_3}{R}, \quad (\varepsilon)$$

wodurch die Größe und Richtung der Resultante R vollständig bestimmt ist.

Umgekehrt, wenn man eine Kraft R nach drei auf einander senkrechten Richtungen zerlegen soll, so geben die Relationen (δ) die Größe und die Gleichungen (ε) die Richtung der Componenten. —

Man kann nun auch leicht die Größe und Richtung der Resultante R beliebig vieler, nach verschiedenen Richtungen im Raume auf denselben materiellen Punkt A wirkender Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ durch Rechnung finden. Denn wenn $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ und α', β', γ' resp. die Winkel bezeichnen,



welche die Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ und R mit drei beliebigen durch den Punkt A gelegten rechtwinkligen Axen Ax, Ay, Az bilden, und man zerlegt diese Kräfte nach diesen Axen; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} R\cos\alpha' &= P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots\ldots P_n\cos\alpha_n \\ &= \Sigma.\ P\cos\alpha = \Sigma.\ X, \\ R\cos\beta' &= P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots\ldots P_n\cos\beta_n \\ &= \Sigma.\ P\cos\beta = \Sigma.\ Y, \\ R\cos\gamma' &= P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots\ldots P_n\cos\gamma_n \\ &= \Sigma.\ P\cos\gamma = \Sigma.\ Z. \end{aligned}\right\} \quad (\mu)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= (\Sigma.\ P\cos\alpha)^2 + (\Sigma.\ P\cos\beta)^2 + (\Sigma.\ P\cos\gamma)^2 \\ &= (\Sigma.\ X)^2 + (\Sigma.\ Y)^2 + (\Sigma.\ Z)^2, \end{aligned}\right\} \quad (\nu)$$

und:

$$\cos\alpha' = \frac{\Sigma.\ P\cos\alpha}{R} = \frac{\Sigma.\ X}{R},$$

$$\cos\beta' = \frac{\Sigma.\ P\cos\beta}{R} = \frac{\Sigma.\ Y}{R},$$

$$\cos\gamma' = \frac{\Sigma.\ P\cos\gamma}{R} = \frac{\Sigma.\ Z}{R},$$

wodurch also die Größe und Richtung der Resultante R vollständig bestimmt ist.

Wenn die betrachteten Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, so muß:

$$R = 0,$$

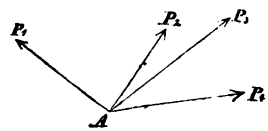
also nach (ν):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma.\, P\cos\alpha &= \Sigma.\, X = 0, \\ \Sigma.\, P\cos\gamma &= \Sigma.\, Y = 0, \\ \Sigma.\, P\cos\gamma &= \Sigma.\, Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mu')$$

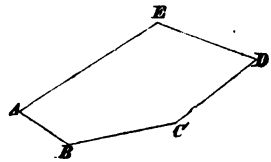
sein. —

Wie lauten die durch die Gleichungen (μ') ausgedrückten Bedingungen des Gleichgewichtes in Worten? —

§. 20. Offenbar ist die Größe der Resultante R mehrerer auf denselben Punkt A wirkender Kräfte P_1, P_2, P_3, ... blos von der Größe und den gegenseitigen Neigungen dieser Kräfte und nicht von ihren Neigungen gegen die Coordinatenaxen abhängig. In der That kann man für R leicht einen Ausdruck finden, worin blos die Größen P_1, P_2, P_3, ... $\cos(P_1, P_2)$, $\cos(P_1, P_3)$ $\cos(P_2, P_3)$ .... vorkommen; allein es müssen zuvor erst einige andere Sätze abgeleitet werden. —



Zunächst ist einleuchtend, daß die Projektion einer Seite AE eines beliebigen Vieleckes $ABCDE$ auf eine beliebige Axe $0x$ der algebraischen Summe der Projektionen aller übrigen Seiten desselben auf dieselbe Axe $0x$ gleich ist; denn man braucht, um dies einzusehen, sich 0 ——————— x nur durch die Winkelspitzen des ebenen oder nicht ebenen Vieleckes senkrechte Ebenen auf die Projektionsaxe $0x$ gelegt zu denken. —



Es ist also auch nach §. 18. die Projektion oder Componente der Resultante beliebiger, auf denselben materiellen Punkt A wirkender Kräfte P_1, P_2, P_3, ... nach einer beliebigen Axe der algebraischen Summe der Projektionen oder Componenten dieser Kräfte nach derselben Axe gleich. —

So ist z. B. die Projektion $\mathfrak{P}$ der Diagonale $OE = \mathfrak{R}$ eines

rechtwinkligen Parallelepipedums auf irgend eine gerade Linie OV gleich der algebraischen Summe der Projektionen der drei zusammenstoßenden Kanten $OA = \mathfrak{X}$, $OB = \mathfrak{Y}$, $OC = \mathfrak{Z}$ oder der gleichen OA, AD, DE, so daß, wenn a, b, c die Winkel bezeichnen, welche OV mit den drei rechtwinkligen Axen bildet, man hat:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{X} \cos a + \mathfrak{Y} \cos b + \mathfrak{Z} \cos c.$$

Sind ferner α, β, γ die Winkel, welche OE mit den drei rechtwinkligen Axen bildet, und ist $\angle DOV = \Theta$, so hat man:

$\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \cos \Theta$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{R} \cos \alpha$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{R} \cos \beta$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R} \cos \gamma$,

und wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung setzt; so erhält man:

$$\cos \Theta = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma. \qquad (\iota)$$

Es ist also auch:

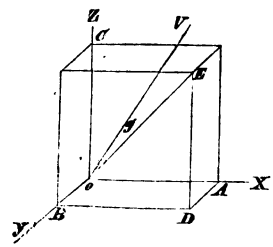
$$\left.\begin{aligned} \cos (P_1, P_2) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2, \\ \cos (P_1, P_3) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3, \\ \cos (P_2, P_3) &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} (\lambda)$$

und:

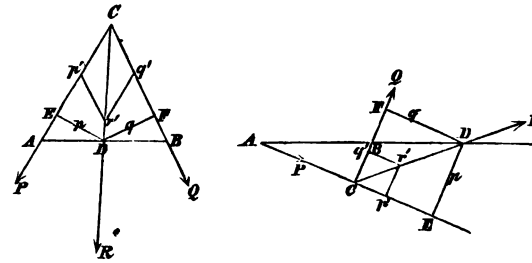
$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} . (\chi)$$

Setzt man nun in (ν) für ΣX, ΣY, ΣZ ihre Werthe, entwickelt die Quadrate, und beachtet die Gleichheiten (λ), (χ); so erhält man endlich für den gesuchten Ausdruck:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \ldots + 2 P_1 P_2 \cos (P_1, P_2) + 2 P_1 P_3 \cos (P_1, P_3) + \ldots 2 P_2 P_3 \cos (P_2, P_3) + \ldots$$



§. 21. Wenn zwei Kräfte P, Q auf zwei verschiedene Punkte A, B eines festen Körpers wirken, d. h. eines Körpers,



dessen materielle Punkte, also auch A, B, unter der Wirkung beliebiger Kräfte stets dieselbe gegenseitige Lage behalten, so daß AB als eine absolut starre gerade Linie von unveränderlicher Länge betrachtet werden kann; so können zwei Fälle stattfinden: 1) die Richtungen der Kräfte sind verschieden, so daß sie genugsam verlängert, sich in einem Punkte C schneiden, oder 2) sie sind parallel, schneiden sich also nicht, wobei übrigens die beiden Kräfte P, Q auf derselben Seite, oder auf verschiedenen Seiten der geraden Linie AB liegen können.

Wir wollen zunächst den ersten Fall betrachten, woraus sich der zweite leicht ableiten läßt. — Im ersten Falle kann man sich vorstellen, daß die beiden Kräfte P, Q in dem Durchschnittspunkte C ihrer Richtungen angebracht sind, vorausgesetzt, daß der Punkt C mit A, B auf eine unveränderliche Weise fest verbunden ist, so daß auch AC, BC absolut starre gerade Linien von unveränderlicher Länge sind; denn die Erfahrung lehrt: daß man eine Kraft in jedem Punkte ihrer Richtung anbringen kann, ohne daß an ihrer Wirkung etwas geändert wird, wenn der neue Angriffspunkt mit dem frühern auf eine unveränderliche Weise fest verbunden ist. — Man hat also nach §. 11:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,\cos(P, Q)}, \quad (\alpha)$$

$$\sin(P, R) = \frac{Q}{R}\sin(P, Q),$$

wodurch die Größe und Richtung der Resultante R bestimmt wird. —

§. 22. Ferner ist nach §. 16:

$$P : Q = \sin(Q, R) : \sin(P, R)$$

und wenn man die Perpendikel DE, DF zieht, so ist:

$$DE = p = CD.\ sin\ (P, R), \text{ also } sin\ (P, R) = \frac{p}{CD},$$

$$DF = q = CD.\ sin\ (Q, R), \text{ also } sin\ (Q, R) = \frac{q}{CD}.$$

Setzt man diese Werthe in die letzte Proportion, so ergibt sich:

$$P : Q = q : p, \text{ also } P.p = Q.q,$$

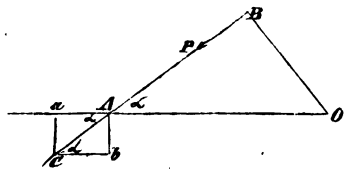
d. h. die beiden Kräfte verhalten sich umgekehrt, wie die von irgend einem Punkte D der Richtung ihrer Resultante auf ihre respektiven Richtungen gefällten Perpendikel. —

§. 23. Wenn der Punkt D als fest gedacht wird, so wird die Wirkung der Resultante R aufgehoben, und die beiden Kräfte, welche man sich in E und F angebracht denken kann, halten einander das Gleichgewicht, indem sie die Ebene, worin sie liegen, mit gleicher Energie, aber in entgegengesetztem Sinne um den festen Punkt D zu drehen streben. Aus der Gleichheit:

$$P.p = Q.q$$

folgt aber: daß die Drehungsenergie einer Kraft um oder in Beziehung auf einen festen Punkt gemessen wird durch das Produkt aus dieser Kraft und dem von dem festen Punkte auf ihre Richtung gefällten Perpendikel — und man nennt dieses Produkt das Moment dieser Kraft in Beziehung auf diesen Punkt — so wie das Perpendikel den Arm (Drehungsarm — Drehungshalbmesser) derselben.

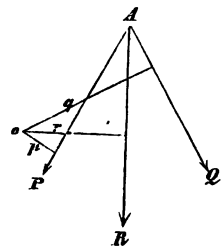
In der That erhellet leicht: daß nur dieses Moment das wahre Maß der Drehungsstärke einer Kraft P in Bezug auf einen festen Punkt O ist, und nicht das Produkt aus dieser Kraft P und einer schiefen Linie OA, welche aus dem festen Punkte O nach irgend einem Punkte A der Richtung der Kraft gezogen ist. Denn nimmt man A zum Angriffspunkte der Kraft $P = Ac$ und zerlegt sie in die beiden auf einander senkrechten Componenten $Aa = Ac.\ cos\ \alpha = P\ cos\ \alpha$ und $Ab = Ac.\ sin\ \alpha = P\ sin\ \alpha$, so wird die erste durch den festen Punkt O aufgehoben, und das Moment der

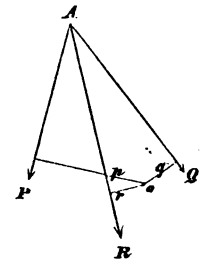


zweiten ist $= P \sin \alpha . \overline{AO} = P . (\overline{AO} \sin \alpha) = P . \overline{OB}$. Hieraus sieht man zugleich: daß die Drehungsenergie einer Kraft dieselbe bleibt, welchen Punkt ihrer Richtung man zum Angriffspunkte nehmen und mit dem festen Punkte verbinden mag. —

Wir werden ein Moment positiv, oder negativ nennen, jenachdem ihm eine Drehung rechts, oder links entspricht. —

Endlich folgt aus dem Begriffe der Resultante, indem man sich das ganze System als absolut starr denkt: daß das Moment derselben der algebraischen Summe der Momente der Componenten gleich ist — weil die Wirkung der Resultante der der Componenten zusammengenommen gleich sein muß. —





Es ist also:

$$R . r = P . p \pm Q . q,$$

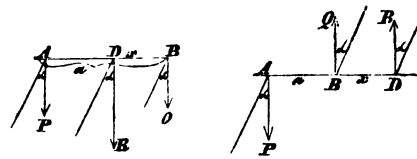
und allgemein für n Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, deren Arme respective p_1, p_2, p_3, ... p_n sind:

$$R . r = P_1 . p_1 + P_2 . p_2 + P_3 . p_3 + \ldots P_n . p_n,$$

wobei die Zeichen der Momente gehörig beachtet werden müssen. —

§. 24. Um den zweiten der im §. 21 erwähnten beiden Fälle aus dem ersten abzuleiten, braucht man nur anzunehmen, daß sich der Punkt C (Fig. auf S. 17) auf irgend einer geraden Linie ins Unendliche entfernt; denn alsdann werden die Richtungen der Kräfte P, Q und R zu dieser geraden Linie parallel, indem ihre Angriffspunkte A, B und D dieselben bleiben. — Wenn diese gerade Linie in D auf AB senkrecht ist, so fallen, indem sich C ins Unendliche entfernt, die Perpendikel DE, DF respective mit AD, BD zusammen, die Richtungen von P, Q, R werden auf AB senkrecht, es wird der Winkel $ACB = (P, Q) = 0$, also $\cos (P, Q) = 1$, und der Winkel BCE als das Supplement von $(P, Q) = 180^\circ$, also

$\cos BCE = -1$, die Figuren auf Seite 17 gehen in nachstehende über



und die Formel (α) gibt also:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 \pm 2PQ} = Q \pm P,$$

wo $Q > P$ angenommen ist. Nach §. 22. verhält sich ferner:

$$P : Q = q : p = DB : DA,$$

also auch:

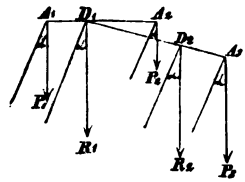
$$P : Q \pm P = DB : DA \pm DB$$
$$= x : a,$$

folglich:

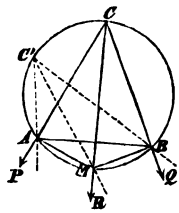
$$x = \frac{a\,P}{Q \pm P},$$

so daß mithin die Größe und Lage der Resultante R vollständig bestimmt ist.

Wenn die durch D gehende gerade Linie, auf welcher sich der Punkt C ins Unendliche entfernt, gegen AB nicht senkrecht, sondern schief ist; so sind es die zu ihr parallelen Richtungen der Kräfte P, Q, R auch. Wenn sich also die Kräfte P, Q in demselben Sinne um die Angriffspunkte A, B um denselben Winkel α drehen, so drehet sich ihre Resultante R um ihren Angriffspunkt ebenfalls in demselben Sinne um den Winkel α. Aus dem Vorhergehenden erhellet auch zur Genüge, wie die Resultante mehrerer paralleler Kräfte P_1, P_2, P_3, ... gefunden wird, so wie: daß die Resultante derselben sich um ihren Angriffspunkt um einen Winkel α drehet, wenn sich jede der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... in demselben Sinne um den Winkel α drehet, weshalb dieser Angriffspunkt der Resultante der Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt wird. —



Auch zwei nicht parallele in derselben Ebene liegende Kräfte P, Q



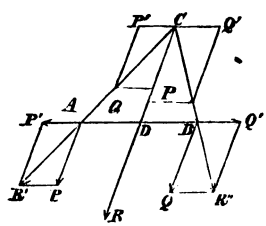
haben einen Mittelpunkt. — Denn denkt man sich ihre Richtungen bis zum Durchschneiden in C verlängert, und durch die drei Punkte A, B, C einen Kreis beschrieben; so geht die Resultante R auch noch durch den Punkt M, wenn sich die beiden Kräfte P, Q um ihre Angriffspunkte A, B so drehen, daß ihre gegenseitige Neigung ungeändert bleibt, was der Fall ist, wenn sich der Punkt C auf dem Umfange des über AB beschriebenen Kreisabschnittes bewegt, und z. B. in die Lage C' gekommen ist, weil die Intensitäten, so wie die gegenseitige Richtung der Kräfte P, Q ungeändert geblieben ist, wovon die Richtung und Größe der Resultante allein abhängt. — Es ist also $\angle MC'B = \angle MCB$, und folglich geht die Richtung der Resultante noch durch den Punkt M, welcher mithin der Mittelpunkt der Kräfte P, Q ist. — Kommt noch eine dritte Kraft hinzu, welche mit den beiden ersten in derselben Ebene liegt, so verfährt man mit der in M angebrachten Resultante R und dieser dritten Kraft, wie mit P und Q, u. s. f., so daß man leicht den Mittelpunkt beliebig vieler, in derselben Ebene liegender Kräfte finden kann, wenn sie sich auf eine Resultante bringen lassen. —

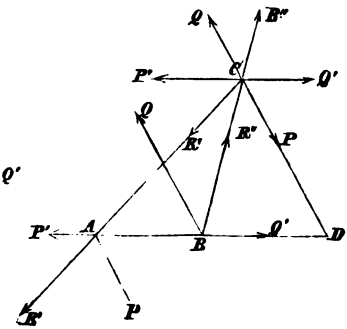
Es verhält sich ferner:

$$\begin{aligned} P : Q : R &= MCB : \sin ACM : \sin ACB \\ &= \sin MAB : \sin MBA : \sin AMB \\ &= MB : MA : AB. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich nun auch leicht die vorhergehenden Resultate für parallele Kräfte ableiten. —

§. 25. Uebrigens kann man den Fall paralleler Kräfte auch sehr leicht direkt behandeln, indem man in den Punkten A, B zwei





gleiche und entgegengesetzte Kräfte $P' = Q'$ längs AB anbringt, wodurch nichts geändert wird, weil die Wirkungen dieser beiden Kräfte einander gegenseitig aufheben (§§. 11 u. 21), hierauf die Kräfte P, P' zu der Resultante R' und ebenso die Kräfte Q, Q' zu der Resultante R'' zusammensetzt, dann diese Resultanten in dem Durchschnittspunkte C ihrer Richtungen anbringt und endlich sie hier wieder in ihre ursprünglichen Componenten P, P' und Q, Q' zerlegt. Alsdann heben sich P' und Q' wieder gegenseitig auf, und es bleiben nur die nach derselben geraden Linie CD in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne wirkenden beiden Kräfte P, Q übrig, deren Resultante R also $= Q \pm P$ ist. —

Ferner verhält sich:

$$P : P' = CD : DA,$$
$$Q : Q' = CD : DB,$$

also wegen $P' = Q'$:

$$P : Q = DB : DA, \qquad (\beta)$$

woraus sich dieselbe Lage des Punktes D gegen B ergibt, wie früher. —

Welche Regel wird durch die Proportion (β) ausgedrückt?

Aus dieser Proportion folgt weiter:

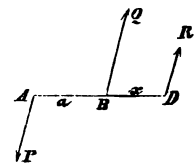
$$P : Q \pm P = DB : AB,$$
$$Q : Q \pm P = DA : AB,$$

oder wegen $R = Q \pm P$:

$$P : Q : R = DB : DA : AB. \qquad (\gamma)$$

Wie lautet der in der Proportion (γ) liegende Lehrsatz, und welche Aehnlichkeit hat derselbe mit dem in §. 16? —

§. 26. Wenn zwei parallele Kräfte P, Q in den Punkten A, B



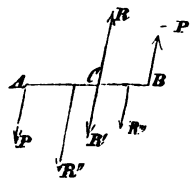
einer starren geraden Linie AB auf entgegengesetzten Seiten derselben wirken, so ist nach §. 24. ihre Resultante:

$$R = Q - P,$$

und die Entfernung $x = BD$ ihres Angriffspunkes D von dem Angriffspunkte B der größeren Kraft Q:

$$x = \frac{a\,P}{Q - P}. \qquad (\delta)$$

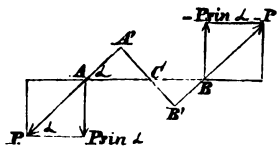
Wird also $P = Q$ genommen, so ist $R = 0$ und $x = \infty$, d. h. man erhält in diesem Falle ein unbrauchbares Resultat, welches zeigt: daß sich zwei an den Enden einer starren geraden Linie AB nach entgegengesetztem Sinne wirkende gleiche und parallele Kräfte P, $-P$*) nicht in eine Resultante R zusammensetzen lassen — so daß man folglich auch ein solches System von Kräften nicht durch eine Kraft im Gleichgewichte halten kann. — Dies läßt sich auch leicht direkt zeigen. Denn wenn die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte P, $-P$ eine Resultante R hätten, und man brächte in C eine der R gleiche und entgegengerichtete Kraft R' an, so müßten die drei Kräfte P, $-P$, R' im Gleichgewichte sein, was jedoch nicht der Fall sein kann, weil man R' mit einer der beiden gleichen Kräfte P, $-P$, z. B. mit P, in eine Kraft R'' und diese wieder mit $-P$ in eine Resultante R''' zusammensetzen kann, so daß also diese letzte Kraft für sich allein im Gleichgewichte sein müßte, was dem Begriffe der Kraft offenbar widerspricht. —



§. 27. Ein solches System gleicher, paralleler und entgegengerichteter Kräfte wird ein Kräftepaar genannt, und soll mit $(P, AB, -P)$ bezeichnet werden. Die Wirkung desselben

*) Wenn parallele Kräfte nach entgegengesetztem Sinne wirken, so müssen die nach dem einen Sinne wirkenden als positiv und die in entgegengesetztem Sinne wirkenden als negativ betrachtet werden, wie auch schon aus §. 24. folgt, während in jedem andern Falle die Kräfte als absolut gedacht werden. —

besteht offenbar darin: die Ebene, worin es liegt, in dem einen oder anderen Sinne um die Mitte C der starren geraden Linie AB,



welche der Arm des Kräftepaares heißt, zu drehen — und zwar mit einer Stärke, Intensität oder Energie, welche nach §. 23. offenbar ausgedrückt wird durch:

$$CA.\ P\ \sin\alpha + CB.\ P\ \sin\alpha = (AC + CB)\ P\ \sin\alpha$$
$$= AB.\ P\ \sin\alpha = CA\ \sin\alpha.\ P + CB\ \sin\alpha.\ P$$
$$= CA'.\ P + CB'.\ P = A'B'.\ P = a.\ P,$$

d. h. durch das Produkt $a.\ P = A'B'.\ P$ aus seinem auf der Richtung der Kräfte senkrechten Arme $A'B' = a$ und aus einer dieser Kräfte. — Dies folgt auch schon daraus: daß nach der Gleichung (δ) stets:

$$(Q - P)\ x = a.\ P$$

ist, wie groß x und wie klein $Q - P$ auch sein mag. — Auch ohne Zerlegung der Kräfte ist dies einleuchtend, weil man die Angriffspunkte der Kräfte immer aus A, B nach A', B' verlegen kann, wenn das ganze System als vollkommen starr angenommen wird, so daß alle Punkte und Linien als auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden angesehen werden (§. 21). Das Produkt $a.\ P$ heißt das Moment des Kräftepaares — und kann auch als Ausdruck desselben dienen, weil es die Wirkung des Kräftepaares ausdrückt. — Da ferner jedes schiefe Kräftepaar leicht in ein gleichgeltendes rechtwinkliges verwandelt werden kann, so soll der Kürze und Bestimmtheit wegen in Zukunft blos von rechtwinkligen Kräftepaaren die Rede sein. —

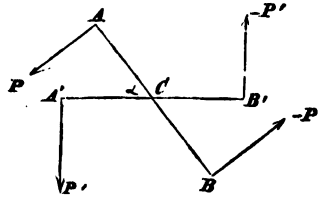
§. 28. Ein Kräftepaar soll ferner ein positives, oder negatives genannt werden, je nachdem es seine Ebene rechts, oder links herumzudrehen strebt, was voraussetzt: daß sämmtliche in einer Ebene gegebene oder betrachtete Kräftepaare von derselben Seite dieser Ebene aus betrachtet werden, weil sich mit dieser Seite auch der Drehungssinn jedes Kräftepaares in den entgegengesetzten verwandelt. —

§. 29. Ein gegebenes Kräftepaar $a.\ P$ kann leicht in ein anderes gleichwirkendes $b.\ Q$ von einem gegebenen Arme b ver-

wandelt werden; denn man braucht nur seine Kraft $Q = \frac{a.\,P}{b}$ zu nehmen, weil alsdann $b.\,Q = \frac{a.\,P}{b}\,b = a.\,P$ ist — und umgekehrt kann man das Kräftepaar $a.\,P$ leicht in ein anderes von einer gegebenen Kraft Q umsetzen, wenn man den Arm $= \frac{a.\,P}{Q}$ nimmt. —

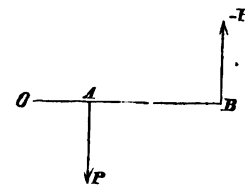
§. 30. Wir wollen nun zunächst einige Eigenschaften der Kräftepaare anführen:

1) Die Drehungsstärke eines Kräftepaares $(P,\ AB,\ -P)$ wird offenbar nicht geändert, wenn sich der Arm AB desselben um seine Mitte C um irgend eine Winkelgröße α drehet — denn das zweite Kräftepaar $(P',\ A'B',\ -P')$ ist nichts weiter als eine der successiven Lagen des ersten $(P,\ AB,\ -P)$. —



Die Accente dienen blos zur Unterscheidung der Lage des Kräftepaares — und es ist immer $P = P' \ldots AB = A'B' = \ldots$

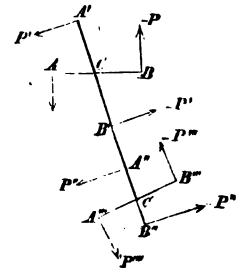
2) Die Drehungsstärke, d. h. das Drehungsmoment eines Kräftepaares ist auch in Beziehung auf jeden anderen festen Punkt O



in der Richtung seines Armes $= AB.\ P = a.\ P$; denn man hat für dieses Moment den Ausdruck:

$$OB.\ P - OA.\ P = (OB - OA)\ P = AB.\ P = a.\ P.$$

3) Aus 1) und 2) folgt ferner: daß ein Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verrückt werden kann, ohne daß an seiner Drehungsstärke etwas geändert wird. Denn nach 1) ist $(P,\ AB,\ -P)$



$= (P', AB', -P')$, ferner nach 2) ist $(P', A'B', -P') = (P'', A''B'', -P'')$ und nach 1) ist $(P'', A'B'', -P'') = (P''', A'''B''', -P''')$; also endlich:

$$(P, AB, -P) = (P''', A'''B''', -P''').$$

4) Die Drehungsstärke eines Kräftepaares ist also in Beziehung auf jeden beliebigen als fest gedachten Punkt seiner Ebene dieselbe. —

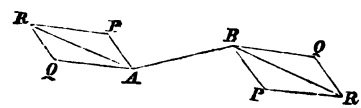
5) Zwei gleiche und entgegengesetzte Kräftepaare, d. h. welche ihre Ebene mit gleicher Stärke nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben, halten einander das Gleichgewicht. — Denn man braucht ihre Drehungsenergie nur auf denselben Punkt O ihrer Ebene zu beziehen, oder sie in zwei äquivalente Kräftepaare von demselben Arme zu verwandeln und diese Arme dann zusammenfallen zu lassen — um dies einzusehen. —

6) Ferner ist das Drehungsmoment des Kräftepaares, dessen Wirkung der vereinigten Wirkung mehrerer in derselben Ebene liegender Kräftepaare gleich ist — d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaares, offenbar der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare gleich. — Denn man braucht nur wie in 5) zu verfahren, um die Richtigkeit der Behauptung sofort einzusehen. —

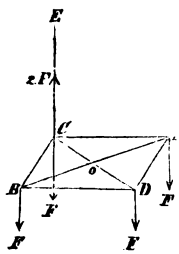
7) Auch kann man ein Kräftepaar ohne Aenderung seiner Wirkung aus seiner Ebene in eine zu derselben parallele Ebene versetzen, vorausgesetzt, daß beide Ebenen zu einem festen Systeme gehören. Denn denkt man sich eine beliebige, auf beiden Ebenen senkrechte gerade Linie AB, so drehet das Kräftepaar das System

offenbar mit derſelben Stärke um die Axe *AB*, es mag in der erſten, oder in der zweiten Ebene liegen. —

8) Endlich kann man auch leicht zwei Kräftepaare, welche in verſchiedenen, nicht parallelen Ebenen liegen, in eins zuſammenſetzen. — Zu dem Zwecke braucht man die beiden gegebenen Kräftepaare nur in zwei andere $(P, AB, -P)$, $(Q, AB, -Q)$ von demſelben Arme *AB* zu verwandeln, dieſe in ihren reſp. Ebenen ſo zu verrücken, daß die gleichen Arme *AB* in der Durchſchnittslinie beider Ebenen zuſammenfallen, und endlich die Kräfte *P*, *Q* in den Endpunkten von *AB* in eine Reſultante *R* zuſammenzuſetzen; ſo iſt $(R, AB, -R)$ das geſuchte Reſultantenpaar.



Oder man verwandelt die beiden gegebenen Kräftepaare in zwei andere von derſelben Kraft *F* und von ungleichen Armen *CA*, *CB*, und verlegt dieſe in ihren reſp. Ebenen *ECA*, *ECB* ſo, daß ſie in demſelben Punkte *C* der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie *EC* beider Ebenen zuſammenſtoßen und zwei Kräfte *F* in dieſe Linie fallen. — Conſtruirt man alsdann das Parallelogramm *CADB*, ſo kann man offenbar für die beiden Kräfte *F* in *A* und *B* die beiden Kräfte *F* in *C* und *D* ſetzen, weil beide Paare dieſelbe Reſultante 2 *F* in *O* geben. — Aber alsdann heben ſich in *C* zwei gleiche und entgegengeſetzte Kräfte *F* auf und es bleibt blos das Kräftepaar $(F, CD, -F)$, welches folglich das geſuchte Reſultantenpaar iſt. —



Es iſt übrigens gar nicht nothwendig: die beiden gegebenen Kräftepaare erſt in zwei andere von gleichen Armen, oder gleichen Kräften zu verwandeln, ſondern man kann ſofort ihre Momente ſelbſt nach dem Parallelogramme der Kräfte zuſammenſetzen, wenn man zwei gerade Linien *OA*, *OB*, welche ſich wie dieſe Momente verhalten, unter dem Winkel der Ebenen der beiden gegebenen Kräftepaare an einander legt und das dadurch beſtimmte Parallelogramm conſtruirt, deſſen Diagonale alsdann das Moment des Reſultantenpaares darſtellt. —

§. 31. Gerade Linien, welche den Momenten der Kräftepaare proportional und auf ihren resp. Ebenen senkrecht sind, werden Axen der Kräftepaare genannt — und wenn man ein für alle Mal festsetzt: daß die Axe eines Kräftepaares auf der Seite oder Fläche seiner Ebene steht, auf welcher dasselbe als ein positives erscheint; so wird ein Kräftepaar durch seine Axe vollständig, d. h. seine Ebene, sein Moment und sein Sinn bestimmt. —

Es lassen sich also Kräftepaare ebenso wie einzelne Kräfte zusammensetzen und zerlegen. — Soll man z. B. zwei Kräftepaare, deren Momente L, M und deren Ebenen oder Axen auf einander senkrecht sind, in eins zusammensetzen; so hat man, wenn G das Moment des Resultantenpaares und Θ den Winkel bezeichnet, welchen seine Ebene oder Axe mit der von L bildet (§. 18.):

$$L = G \cos \Theta, \quad M = G \sin \Theta, \qquad (\mu)$$

also:

$$G^2 = L^2 + M^2, \quad G = \sqrt{L^2 + M^2},$$

und:

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{M}{L}.$$

Umgekehrt, soll man ein Kräftepaar G in zwei auf einander senkrechte Kräftepaare L, M zerlegen, so geben die Gleichungen (μ) die Werthe von L, M und auch ihre Lage, weil daraus folgt:

$$\cos \Theta = \frac{L}{G}, \quad \sin \Theta = \frac{M}{G}.$$

Ebenso hat man für die Zusammensetzung und Zerlegung dreier auf einander senkrechter Kräftepaare L, M, N, wenn G das Resultantenpaar und α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche seine Ebene oder Axe mit denen von L, M, N bildet:

$$L = G \cos \alpha, \quad M = G \cos \beta, \quad N = G \cos \gamma,$$

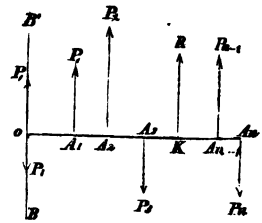
also:

$$\cos \alpha = \frac{L}{G}, \quad \cos \beta = \frac{M}{G}, \quad \cos \gamma = \frac{N}{G},$$

und:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

§. 32. Wenn an einem festen Systeme mehrere in derselben Ebene liegende parallele Kräfte P_1, P_2, ... P_n wirken, so kann man von einem beliebigen Punkte O dieser Ebene auf die



gemeinschaftliche Richtung dieser Kräfte ein Perpendikel OA_n ziehen, und indem man in O zwei einander aufhebende gleiche und entgegengesetzte Kräfte P_1, — P_1 anbringt, wodurch offenbar an dem Systeme nichts geändert wird, die in A_1 wirkende Kraft P_1 durch die in O angebrachte Kraft P_1 und durch ein Kräftepaar (P_1, OA_1, — P_1) ersetzen — und dasselbe gilt von jeder der übrigen Kräfte P_2, .. P_n. Die nach der geraden Linie BOB' wirkenden Kräfte kann man nun in eine Resultante:

$$R = P_1 + P_2 + ... + P_n = \Sigma. P$$

und die an den Armen $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$, ... $OA_n = x_n$ wirkenden Kräftepaare in ein Resultantenpaar gleich:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n = \Sigma. Px$$

zusammensetzen, so daß also die gegebenen Kräfte durch die Kraft $\Sigma. P$ und durch das Kräftepaar $\Sigma. Px$ ersetzt werden. —

Wenn die Resultante $R = \Sigma. P = 0$ ist, so hat man blos das Kräftepaar $\Sigma. Px$, und es ist zum Gleichgewichte der gegebenen Kräfte nur erforderlich, daß die Bedingung:

$$\Sigma. Px = 0$$

stattfindet. —

Wenn die Resultante $R = \Sigma. P$ nicht $= 0$ ist, so verwandle man das Kräftepaar $\Sigma. Px$ in ein äquivalentes, dessen Kräfte $= R = \Sigma. P$ sind und dessen Arm OK in die Linie OA_n fällt. Alsdann ist:

$$(\Sigma. P). OK = \Sigma. Px,$$

folglich:

$$OK = \frac{\Sigma. Px}{\Sigma. P},$$

und da sich die in O nach BB' wirkenden gleichen und direkt entgegengesetzten Kräfte R gegenseitig aufheben; so ist das System der gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n auf eine in dem Punkte K wirkende Kraft $R = \Sigma. P$ zurückgeführt. —

Soll also Gleichgewicht stattfinden, so muß diese Kraft:

$$R = \Sigma. P = 0$$

sein, so daß man wieder auf den ersten Fall zurückkommt. — Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes der betrachteten Kräfte sind also:

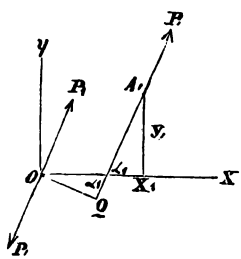
$$\Sigma. P = 0, \quad \Sigma. Px = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Kräfte, so wie die der Momente derselben in Beziehung auf einen beliebigen in ihrer Ebene liegenden Punkt, oder auf eine beliebige auf dieser Ebene senkrechte Axe, müssen einzeln $= 0$ sein. —

§. 33. Wenn sich in der Ebene der gegebenen Kräfte ein fester Punkt, oder in dem Systeme eine feste nicht zu dieser Ebene parallele Axe befindet, so kann man diesen festen Punkt, oder den Durchschnittspunkt dieser Axe mit der Ebene der Kräfte zu dem Punkte O nehmen. — Alsdann wird die Resultante $R = \Sigma. P$, auch wenn sie nicht $= 0$ ist, in dem Punkte O aufgehoben — und es bleibt blos das Kräftepaar $\Sigma. Px$, welches das System um den Punkt O zu drehen sucht. Soll also Gleichgewicht stattfinden, so muß $\Sigma. Px = 0$ sein. — d. h. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf den festen Punkt, oder auf den Durchschnittspunkt der festen Axe mit der Ebene der Kräfte muß $= 0$ sein. —

§. 34. Der Druck auf den festen Punkt ist $= \Sigma. P$, d. h. derselbe, als wenn jede Kraft ohne Aenderung ihrer Richtung in diesen Punkt verlegt würde.

§. 35. Wenn in derselben Ebene mehrere nicht parallele Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ gegeben sind, deren Richtungen mit der Axe der x die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bilden und deren Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ haben, so ziehe man OQ senkrecht auf die Richtung der Kraft P_1, und in O bringe man zwei gleiche und entgegengesetzte, auf OQ senkrechte Kraft $= P_1$ an, wodurch an dem Systeme offenbar nichts geändert wird. — Alsdann kann man statt der in A_1 angebrachten Kraft P_1 die in O angebrachte, zu ihr parallele Kraft P_1



und das Kräftepaar $(P_1, OQ, -P_1)$ nehmen, dessen Moment wegen $OQ = x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1$ gleich:

$$\begin{aligned} &-(x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) P_1 \\ &= (P_1 \cos\alpha_1) y_1 - (P_1 \sin\alpha_1) x_1 \\ &= X_1 y_1 - Y_1 x_1 \end{aligned}$$

ist. Nimmt man dieselbe Transformation mit jeder der gegebenen Kräfte vor, so erhält man statt derselben eben so viele in O nach denselben Richtungen wirkende Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ nebst den Kräftepaaren:

$$X_1 y_1 - Y_1 x_1,\ X_2 y_2 - X_2 x_2,\ \ldots\ X_n y_n - Y_n x_n.$$

Bezeichnet also R die Resultante der in O wirkenden Kräfte, und G das Moment des Resultantenpaares, so hat man:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\Sigma. P\cos\alpha)^2 + (\Sigma. P\sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\Sigma. X)^2 + (\Sigma. Y)^2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\Sigma. P\sin\alpha}{\Sigma. P\cos\alpha} = \frac{\Sigma. Y}{\Sigma. X},$$

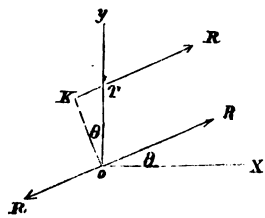
wo Θ den Winkel bezeichnet, welchen R mit der Axe der x bildet, und

$$\begin{aligned} G &= \Sigma. (P\cos\alpha.\, y - P\sin\alpha.\, x) \\ &= \Sigma. (Xy - Yx). \end{aligned}$$

Wenn $\Sigma. X = 0$ und $\Sigma. Y = 0$ ist, so ist auch $R = 0$, und man hat nur das Kräftepaar, dessen Moment $= \Sigma. (Xy - Yx)$ ist. Soll also Gleichgewicht stattfinden, so muß sein:

$$\Sigma. (Xy - Yx) = 0.$$

Wenn nicht zugleich $\Sigma. X = 0$ und $\Sigma. Y = 0$, also auch nicht $R = 0$ ist; so kann man das Kräftepaar $\Sigma. (Xy - Yx)$ in ein anderes verwandeln, dessen Kräfte $= R$ sind, und seinen Arm OK so an O legen, daß eine seiner beiden Kräfte der Resultante R direkt entgegengesetzt ist. — Alsdann heben sich die beiden in O angebrachten gleichen und entgegengerichteten Kräfte R, $-R$ gegenseitig auf, und es bleibt blos die in K oder T wirkende Kraft R übrig. Man hat ferner:



$$OT \cos \Theta = OK,$$

also:

$$R.\ OT.\ \cos \Theta = OT.\ R \cos \Theta = R.\ OK,$$

d. h.:

$$R.\ OK = OT.\ \Sigma.\ X. = \Sigma.\ (Xy - Yx),$$

folglich:

$$OT = \frac{\Sigma.\ (Xy - Yx)}{\Sigma.\ X},$$

so daß sich die gegebenen Kräfte auf eine in T wirkende Kraft R zurückführen lassen. — Soll also Gleichgewicht stattfinden, so muß diese Kraft $R = 0$ sein, so daß man wieder auf den ersten Fall zurückkommt: Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes der betrachteten Kräfte sind also:

$$\Sigma.\ X = 0,\ \Sigma.\ Y = 0,\ \Sigma.\ (Xy - Yx) = 0,$$

d. h. es müssen die algebraischen Summen der Componenten dieser Kräfte nach zwei in ihrer Ebene liegenden, auf einander senkrechten Axen, so wie die Summe ihrer Momente in Beziehung auf einen beliebigen in ihrer Ebene liegenden Punkt, oder auf eine auf dieser Ebene senkrechte Axe einzeln $= 0$ sein.

§. 36. Wenn sich in der Ebene der Kräfte ein fester Punkt, oder auf derselben eine senkrechte feste Axe befindet, so kann man diesen Punkt oder den Durchschnittspunkt dieser Axe mit der Ebene der Kräfte zu dem Punkte O nehmen; alsdann wird die Wirkung der Resultante R in diesem Punkte aufgehoben, wenn auch nicht $R = 0$ oder $\Sigma.\ X = 0$ und $\Sigma.\ Y = 0$ ist, so daß nur die Wirkung des Kräftepaares:

$$\Sigma.\ (Xy - Yx)$$

übrig bleibt. Die einzige Bedingung des Gleichgewichtes ist also in diesem Falle:

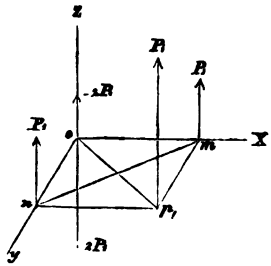
$$\Sigma.\ (Xy - Yx) = 0,$$

d. h. die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf den festen Punkt, oder auf die feste Axe muß $= 0$ sein.

§. 37. Der Druck auf den festen Punkt, oder auf die feste

Axe ist offenbar $= R$, d. h. derselbe, als wenn alle Kräfte bei unveränderter Richtung in den Punkt O verlegt würden. —

§. 38. Wenn mehrere parallele Kräfte im Raume P_1, P_2, ... P_n gegeben sind, und man nimmt drei rechtwinklige Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz an, wovon die letzte zu der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte parallel ist; so kann man, wenn x_1, y_1 die Coordinaten des Punktes p_1 bezeichnen, in welchem die Richtung der Kraft P_1 die Ebene der xy trifft, die Kraft P_1 durch eine in O nach der Axe der z wirkende Kraft P_1 und durch zwei, resp. in der Ebene der xz und der yz liegende Kräftepaare $— P_1x_1$, P_1y_1, ersetzen. —



Denn wenn man das Rechteck Omp_1n construirt und in O nach der Axe der z zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $2P_1$, $— 2P_1$ anbringt, wodurch nichts geändert wird; so kann man die beiden in O und p_1 angebrachten gleichgerichteten Kräfte P_1 in m, n anbringen, weil sie in beiden Lagen in dem Mittelpunkte c des Rechteckes Omp_1n dieselbe Resultante $2P_1$ geben. — Verfährt man nun mit den übrigen Kräften P_2, ... P_n ebenso, so erhält man offenbar statt der gegebenen Kräfte eine in O nach der Axe der z gerichtete Resultante:

$$R = P_1 + P_2 + ... + P_n = \Sigma. P, \qquad (\alpha)$$

in der Ebene der xz ein Resultantenpaar:

$$— \Sigma. (Px)$$

und in der Ebene der yz ein Resultantenpaar:

$$\Sigma. (Py).$$

Setzt man ferner diese beiden Kräftepaare in eins zusammen, dessen Moment mit G bezeichnet werde, so hat man nach §. 31, wenn Θ den Winkel bezeichnet, welchen sein Arm mit Ox bildet:

$$G \cos \Theta = \Sigma. (Px), \; G \sin \Theta = \Sigma. (Py),$$

also:

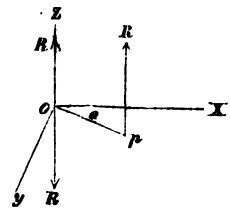
$$G = \sqrt{(\Sigma. Px)^2 + (\Sigma. Py)^2}, \qquad (\beta)$$

und: $$tang\ \Theta = \frac{\Sigma.\ Py}{\Sigma.\ Px}, \qquad (\gamma)$$

so daß durch (α) die in O wirkende Resultante R und durch (β), (γ) das Resultantenpaar vollständig bestimmt werden, welche das System der gegebenen Kräfte ersetzen. —

Wenn $R = \Sigma.\ P = 0$ ist, so bleibt blos noch das Kräftepaar G, und zum Gleichgewichte ist noch die Bedingung $G = 0$ erforderlich.

Ist $R = \Sigma.\ P$ nicht $= 0$, so verwandle man das Kräftepaar G in ein äquivalentes von der Kraft R, und folglich von dem Arme $Op = \frac{G}{R}$, und stelle dasselbe wie in dieser Figur, so daß eine seiner



Kräfte die Resultante R aufhebt, also blos noch eine Kraft R übrig bleibt, welche an dem Punkte p angebracht ist, dessen Coordinaten x', y' durch folgende Gleichungen gegeben werden:

$$x' = Op\ cos\ \Theta \text{ und } y' = Op\ sin\ \Theta$$
$$= \frac{G}{R}\ cos\ \Theta \qquad = \frac{G}{R}\ sin\ \Theta$$
$$= \frac{\Sigma.\ Px}{\Sigma.\ P} \qquad = \frac{\Sigma.\ Py}{\Sigma.\ P}.$$

Soll also Gleichgewicht stattfinden, so muß diese eine Kraft $R = 0$ sein, wodurch man wieder auf den ersten Fall zurückkommt; folglich muß auch $G = 0$, d. h. $\Sigma.\ Px = 0$, $\Sigma.\ Py = 0$ sein. —

Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes der betrachteten Kräfte sind folglich:

$$\Sigma.\ P = 0,\ \Sigma.\ Px = 0,\ \Sigma.\ Py = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Kräfte, so wie die ihrer Momente in Beziehung auf zwei beliebige auf

einander senkrechte gerade Linien in einer auf der Richtung der Kräfte senkrechten Ebene müssen einzeln $= 0$ sein. —

§. 39. Wenn sich in dem Systeme ein fester Punkt befindet, so kann man denselben zu dem Punkte O nehmen, und alsdann wird die Wirkung der Resultante durch diesen festen Punkt aufgehoben, wenn auch nicht $R = 0$ ist, so daß blos noch das Kräftepaar $G = 0$, d. h. $\Sigma. Px = 0$ und $\Sigma. Py = 0$ sein muß, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. D. h. die Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf zwei durch den festen Punkt rechtwinklig gegen einander in einer auf der Richtung der Kräfte senkrechten Ebene gezogene gerade Linien müssen einzeln $= 0$ sein.

Der Druck auf den festen Punkt ist in diesem Falle $= \Sigma. P$, d. h. derselbe, als wenn alle Kräfte bei ungeänderter Richtung in diesen Punkt verlegt würden. —

§. 40. Befindet sich in dem Systeme eine feste gerade Linie oder Axe, so kann man dieselbe zur Axe der y und einen Punkt derselben zum Anfangspunkte O nehmen (s. die Fig. auf S. 33.). Alsdann wird sowohl die Wirkung der Resultante R, wie die des Kräftepaares $\Sigma. Py$ aufgehoben, auch wenn sie nicht an sich Null sind, und es bleibt folglich blos das Kräftepaar $\Sigma. Px$, welches das System um die Axe der y zu drehen sucht, so daß also $\Sigma. Px = 0$ sein muß, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. — D. h. die Summe der Momente der betrachteten Kräfte in Beziehung auf die feste Linie oder Axe muß $= 0$ sein. —

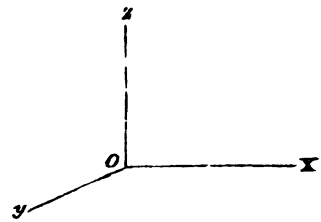
§. 41. Der Druck auf die feste Axe besteht aus der Resultante $R = \Sigma. P$ und aus dem Kräftepaare $\Sigma. Py$, welche nach §. 32. einer einzelnen Kraft $\Sigma. P$ äquivalent sind, die in dem Punkte K von Oy angebracht ist, welcher durch:

$$OK = \frac{\Sigma. Py}{\Sigma. P}$$

bestimmt wird. — Oder: dieser Druck ist derselbe, als wenn die Kräfte P_1, P_2, ... P_n an der Axe Oy in den resp. Abständen y_1, y_2, ... y_n von dem Punkte O ohne Aenderung ihrer Richtung angebracht würden (§. 32.).

§. 42. Wenn die gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n eine

beliebige Lage im Raume haben, also weder parallel sind, noch in einer Ebene liegen, und x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ..... x_n, y_n, z_n die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz



sind; so kann man sich diese Kräfte nach diesen Axen zerlegt denken, wodurch man die drei Systeme von Componenten erhält:

$$X_1, X_2, \ldots X_n,$$
$$Y_1, Y_2, \ldots Y_n,$$
$$Z_1, Z_2, \ldots Z_n.$$

Das letzte System läßt sich nach §. 38. zurückführen auf:
eine Kraft $\Sigma. Z$, in O angebracht und nach Oz wirkend,
ein Kräftepaar $\Sigma. (Zy)$ in der Ebene der yz, und
ein Kräftepaar $-\Sigma. (Zx)$ in der Ebene der xz.

Ebenso kann das zweite System zurückgeführt werden auf:
eine Kraft $\Sigma. Y$, in O angebracht und nach Oy wirkend,
ein Kräftepaar $\Sigma. (Yx)$ in der Ebene der xy, und
ein Kräftepaar $-\Sigma. (Yz)$ in der Ebene der yz.

Endlich kann man das erste System zurückführen auf:
eine Kraft $\Sigma. X$, in O angebracht und nach Ox wirkend,
ein Kräftepaar $\Sigma. (Xz)$ in der Ebene der xz, und
ein Kräftepaar $-\Sigma. (Xy)$ in der Ebene der xy.

Die gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n können also ersetzt werden durch die drei rechtwinkligen Kräfte:

$\Sigma. X$, $\Sigma. Y$, $\Sigma. Z$, angebracht in O

und die drei Kräftepaare:

$\Sigma. (Yx) - \Sigma. (Xy) = \Sigma. (Yx - Xy)$ in der Ebene der xy
$\Sigma. (Xz) - \Sigma. (Zx) = \Sigma. (Xz - Zx)$ „ „ „ „ xz
$\Sigma. (Zy) - \Sigma. (Yz) = \Sigma. (Zy - Yz)$ „ „ „ „ yz

Wenn R die Resultante der drei in O angebrachten rechtwinkligen Componenten, und α, β, γ, die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen Ox, Oy, Oz bildet, so wie G das Resultantenpaar aus den drei vorigen Kräftepaaren, und α', β', γ' die Winkel, welche seine Axe mit Ox, Oy, Oz bildet, bezeichnen; so ist nach §§. 19 u. 31:

$$R\cos\alpha = \Sigma. X,\quad R\cos\beta = \Sigma. Y,\quad R\cos\gamma = \Sigma. Z,$$

also:

$$R = \sqrt{(\Sigma. X)^2 + (\Sigma. Y)^2 + (\Sigma. Z)^2},$$

und:

$$G\cos\alpha' = \Sigma. (Zy - Yz) = L,$$
$$G\cos\beta' = \Sigma. (Xz - Zx) = M,$$
$$G\cos\gamma' = \Sigma. (Yx - Xy) = N;$$

folglich:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Diese 8 Gleichungen geben sowohl die Größe und Richtung der im Anfangspunkte O angebrachten Resultante R, wie die Größe und Richtung der Axe des Resultantenpaares G.

§. 43. Wenn $G = 0$ ist, so lassen sich folglich die gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n auf eine Resultante R zurückführen. — Dasselbe ist auch noch thunlich, wenn G nicht $= 0$, aber die Richtung von R zu der Ebene von G parallel oder auf der Axe von G senkrecht ist; denn alsdann kann man die Ebene von G parallel zu sich selbst durch die Richtung von R legen, und wenn man das Kräftepaar G in ein anderes verwandelt, dessen Kräfte $= R$ sind; so kann man dieses Paar in der letzten Ebene offenbar so verrücken: daß eine seiner Kräfte der Resultante R direkt entgegengesetzt ist, so daß sich diese beiden Kräfte aufheben und blos noch eine Kraft R übrig bleibt, welche der frühern Resultante gleich und parallel ist, und folglich nur eine Verlegung dieser Resultante an einem andern Punkte, ohne Aenderung ihrer Richtung stattgefunden hat. — Die Bedingung: daß die Richtung von R auf der Axe von G senkrecht steht, ist bekanntlich (S. 16, Formel (ι)):

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

oder:

$$\frac{\Sigma. X}{R}\cdot\frac{L}{G} + \frac{\Sigma. Y}{R}\cdot\frac{M}{G} + \frac{\Sigma. Z}{R}\cdot\frac{N}{G} = 0,$$

folglich: $L\,\Sigma.\,X + M\,\Sigma.\,Y + N\,\Sigma.\,Z = 0.$

Die Bedingungen: daß sich die gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ auf eine einzige Resultante zurückführen lassen, sind also:

$$R \text{ nicht} = 0,$$
$$L\,\Sigma.\,X + M\,\Sigma.\,Y + N\,\Sigma.\,Z = 0.$$

§. 44. Auch die Gleichungen der geraden Linie, nach welcher diese Resultante R wirkt, lassen sich leicht finden. Hätten wir nämlich gleich Anfangs irgend einen Punkt ihrer Richtung zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen, so hätten wir blos diese Resultante R und kein Kräftepaar G erhalten. — Wenn also x'', y'', z'' die Coordinaten in Beziehung auf diesen neuen Anfangspunkt bezeichnen, so hat man die Bedingsungsgleichungen:

$$\Sigma.\,(Zy'' - Yz'') = 0,$$
$$\Sigma.\,(Xz'' - Zx'') = 0,$$
$$\Sigma.\,(Yx'' - Xy'') = 0.$$

Sind ferner x', y', z' die Coordinaten dieses neuen Anfangspunktes in Beziehung auf den frühern, so hat man $x'' = x - x'$, $y'' = y - y'$, $z'' = z - z'$, und wenn diese Werthe in die letzten Gleichungen für x'', y'', z'' substituirt werden: so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y'\,\Sigma.\,Z - z'\,\Sigma.\,Y &= \Sigma.\,(Zy - Yz) = L, \\ z'\,\Sigma.\,X - x'\,\Sigma.\,Z &= \Sigma.\,(Xz - Zx) = M, \\ x'\,\Sigma.\,Y - y'\,\Sigma.\,X &= \Sigma.\,(Yx - Xy) = N, \end{aligned} \qquad (\varepsilon)$$

wo x', y', z' jetzt die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Richtung der Resultante sind. — Da man 3 Gleichungen hat, so scheint es, als könnte die Resultante nur an einem Punkte ihrer Richtung angebracht werden. — Wenn man aber die letzten Gleichungen resp. mit $\Sigma.\,X$, $\Sigma.\,Y$, $\Sigma.\,Z$ multiplicirt und die Produkte zusammenaddirt, so ergibt sich die Gleichung:

$$L\,\Sigma.\,X + M\,\Sigma.\,Y + N\,\Sigma.\,Z = 0,$$

welche nach der Voraussetzung: daß sich die gegebenen Kräfte P_1, P_2, $\ldots$ P_n auf eine Resultante R zurückführen lassen, wirklich stattfindet. — Die Gleichungen (ε) sind also nicht unabhängig von einander, sondern jede derselben ist eine Folge aus den beiden andern. Irgend zwei dieser Gleichungen sind mithin die Gleichungen der geraden Linie, nach welcher die Resultante wirkt. —

§. 45. Wenn sich die gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n nicht auf eine Resultante bringen lassen, so kann man sie wenigstens immer auf eine Kraft und auf ein Kräftepaar zurückführen, dessen Axe zu der Richtung der Kraft parallel, oder dessen Ebene darauf senkrecht ist. —

Denn wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Axe des Kräftepaares G mit der Richtung der Kraft R bildet, so zerlege man G in zwei Componenten $G\cos\varphi$, $G\sin\varphi$, deren Axen resp. zu R parallel und normal sind. Setzt man alsdann R und $G\sin\varphi$ wieder wie früher zusammen, so wird die Kraft R in unveränderter Richtung blos in einen andern Punkt verlegt und $G\sin\varphi$ fällt weg. Es bleibt also blos eine Kraft R und ein Kräftepaar:

$$G\cos\varphi = G(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = \frac{L\Sigma.X + M\Sigma.Y + N\Sigma.Z}{R}.$$

§. 46. Die Gleichungen der Resultante R, so wie die der Ebene des Kräftepaares, worauf sich die Kräfte P_1, P_2, ... P_n zurückführen lassen, lassen sich ebenfalls leicht finden. Denn da R durch den Anfangspunkt geht, so sind ihre Gleichungen:

$$\frac{x'}{\cos\alpha} = \frac{y'}{\cos\beta} = \frac{z'}{\cos\gamma},$$

oder:

$$\frac{x'}{\Sigma.X} = \frac{y'}{\Sigma.Y} = \frac{z'}{\Sigma.Z}.$$

Da man ferner annehmen kann: daß die Ebene von G durch den Anfangspunkt geht, und α', β', γ' die Winkel sind, welche ein Perpendikel auf derselben mit den Coordinatenaxen bildet; so ist die Gleichung derselben:

$$x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma' = 0,$$

also:

$$Lx' + My' + Nz' = 0.$$

Die Bedingungen: daß die Ebene von G auf der Richtung von R senkrecht steht, sind:

$$\frac{L}{\Sigma.X} = \frac{M}{\Sigma.Y} = \frac{N}{\Sigma.Z}.$$

§. 47. Die Gleichungen der Richtung der Resultante R, wenn die gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n auf diese Kraft und auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden können, dessen Ebene auf der Richtung der Kraft R senkrecht ist, kann man auch leicht erhalten.

Denn es sei O' irgend ein Punkt in der Richtung von R und x', y', z' seine Coordinaten in Beziehung auf den frühern Anfangspunkt O. Wenn man in Beziehung auf O' ebenso verfährt, wie in Beziehung auf O, so erhält man eine an O' wirkende Resultante R und ein Kräftepaar G', dessen Ebene auf der Richtung von R senkrecht ist; folglich:

$$\frac{L'}{\Sigma. X} = \frac{M'}{\Sigma. Y} = \frac{N'}{\Sigma. Z},$$

wo L', M', N' resp. die Größen:

$$\Sigma. (Zy'' - Yz''), \quad \Sigma. (Xz'' - Zx''), \quad \Sigma. (Yx'' - Xy'')$$

bezeichnen, und x'', y'', z'' die Coordinaten eines Punktes in Beziehung auf O' sind, folglich $x'' = x - x'$, $y'' = y - y'$, $z'' = z - z'$, und mithin:

$$\frac{\Sigma. [Z(y - y') - Y(z - z')]}{\Sigma. X} = \frac{\Sigma. [X(z - z') - Z(x - x')]}{\Sigma. Y} = \frac{\Sigma. [Y(x - x') - X(y - y')]}{\Sigma. Z}.$$

Setzt man x', y', z' aus dem Summenzeichen Σ heraus und L, M, N für ihre Werthe, so erhält man endlich für die gesuchten Gleichungen:

$$z' \cdot \frac{\Sigma. Y}{\Sigma. X} - y' \cdot \frac{\Sigma. Z}{\Sigma. X} + \frac{L}{\Sigma. X} = x' \frac{\Sigma. X}{\Sigma. Y} - z' \cdot \frac{\Sigma. Z}{\Sigma. Y} + \frac{M}{\Sigma. Y} = y' \cdot \frac{\Sigma. X}{\Sigma. Z} - x' \frac{\Sigma. Y}{\Sigma. Y} + \frac{N}{\Sigma. Z}.$$

§. 48. In §. 45. haben wir durch Versetzung der Resultante R das Kräftepaar $G \sin \varphi$ fortgeschafft — und wenn R nochmals versetzt wird, so wird ein neues Kräftepaar eingeführt, dessen Axe auf der des Paares $G \cos \varphi$ senkrecht steht, und folglich mit diesem zu einem größeren Paare als $G \cos \varphi$ zusammengesetzt werden kann. — Das Resultantenpaar ist folglich ein Minimum, wenn seine Axe zu der Resultantenkraft parallel ist, wie in §. 45,

und wird alsdann zuweilen das Hauptpaar, so wie die gerade Linie, nach welcher R wirkt, und deren Gleichungen im vorigen §. gefunden sind, die Centralaxe genannt. —

§. 49. Wenn die Richtung der Resultante R nicht zu der Ebene des Resultantenpaares G parallel ist, und folglich R und G nicht auf eine einzige Kraft zurückgeführt werden können; so ist zum Gleichgewichte der gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n erforderlich, daß einzeln:

$$R = 0 \text{ und } G = 0,$$

d. h.: $\Sigma. X = 0,\ \Sigma. Y = 0,\ \Sigma. Z = 0$
und: $L = 0,\ M = 0,\ N = 0$ (ν)

ist. — Dieselben Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes hat man, wenn $R = 0$ ist, weil alsdann auch $G = 0$ sein muß. — Wenn R zu der Ebene von G parallel ist, so kann man R und G auf eine einzige, an einen andern Punkt versetzte Kraft R bringen — und zum Gleichgewichte ist erforderlich: daß diese Kraft $R = 0$ ist. Aber wenn $R = 0$ ist, so bleibt blos das Kräftepaar G übrig, welches offenbar $= 0$ sein muß, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Man kommt also wieder auf dieselben Bedingungsgleichungen (ν) des Gleichgewichtes, welche ausdrücken: daß die algebraischen Summen der Componenten der gegebenen Kräfte nach drei rechtwinkligen Axen, so wie die ihrer Momente in Beziehung auf dieselben Axen einzeln $= 0$ sein müssen. —

Wenn die Kräfte P_1, P_2, ... auf ein System von festen Körpern wirken, so gelten die Gleichungen (ν) auch für den Gleichgewichtszustand dieses Systemes, weil man sich im Gleichgewichtszustande die einzelnen Körper des Systemes an ihren gegenseitigen Berührungspunkten fest verbunden denken kann, so daß sie nur einen festen Körper bilden, wodurch das Gleichgewicht offenbar nicht gestört wird. —

§. 50. Wenn sich in dem Systeme ein fester Punkt befindet, so kann man denselben zum Anfangspunkte O nehmen, so daß die Resultante R durch den festen Punkt aufgehoben wird, und folglich nur die Wirkung des Paares G bleibt. — Zum Gleichgewichte braucht also blos

$$G = 0,$$

d. h.: $L = 0,\ M = 0,\ N = 0$

zu sein, d. h. die algebraischen Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei durch den festen Punkt gelegte rechtwinklige Axen müssen einzeln $= 0$ sein. —

Der Druck auf den festen Punkt ist $= R$, d. h. derselbe, als wenn sämmtliche Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ parallel zu sich selbst in den festen Punkt verlegt würden. —

§. 51. Wenn sich in dem Systeme eine feste Axe befindet, so kann man dieselbe zur Axe der z und irgend einen ihrer Punkte zum Anfangspunkte O nehmen. Alsdann wird die Wirkung der Kraft R, so wie die der Kräftepaare L, M in den Ebenen der yz und der xz aufgehoben, und es bleibt blos die des Kräftepaares N in der Ebene der xy. — Die einzige Bedingung des Gleichgewichtes ist also in diesem Falle:

$$N = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf die feste Axe muß $= 0$ sein. —

§. 52. Der Druck auf die feste Axe wird dargestellt durch die im Anfangspunkte O angebrachte Kraft R und die beiden Kräftepaare L, M. — Da aber R aus den Componenten $\Sigma. X$, $\Sigma. Y$, $\Sigma. Z$ besteht, so kann man $\Sigma. X$ mit L vereinigen, weil beide in derselben Ebene xz liegen, wodurch man eine in dem Punkte $x = \frac{L}{\Sigma. X}$ wirkende einzelne Kraft $\Sigma. X$ erhält. Ebenso kann man die Kraft $\Sigma. Y$ mit dem Paare M verbinden, wodurch man eine in dem Punkte $y = -\frac{M}{\Sigma. Y}$ wirkende Kraft $\Sigma. Y$ erhält. Endlich hat man noch die in einem beliebigen Punkte der Axe der z angebrachte Kraft $\Sigma. Z$, welche man mit einer der beiden ersten zusammensetzen kann, so daß sich der Druck auf die feste Axe in dem allgemeinsten Falle auf zwei Kräfte zurückführen läßt. —

§. 53. Wenn sich in dem Systeme eine feste Axe befindet, um welche sich dasselbe nicht blos drehen, sondern längs welcher es auch fortgleiten kann; so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes offenbar, wenn man diese Axe zur Axe der z und irgend einen Punkt derselben zum Anfangspunkte O nimmt:

$$\Sigma. Z = 0,\ N = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Componenten der gegebenen Kräfte nach der festen Axe, so wie die ihrer Momente in Beziehung auf dieselbe müssen einzeln = 0 sein.

§. 54. Wenn **drei** Kräfte an einem festen Systeme angebracht sind, und dasselbe im **Gleichgewicht** halten, so liegen die Richtungen dieser Kräfte in **derselben** Ebene, und sind entweder **parallel**, oder gehen durch **denselben** Punkt. —

Denn denkt man sich in dem Systeme irgend eine feste Axe, welche zu keiner der drei Kräfte parallel ist und die Richtungen zweier durchschneidet, so wird das Gleichgewicht dadurch nicht gestört; aber diese beiden Kräfte werden aufgehoben, so daß blos die dritte Kraft noch übrig bleibt, deren Richtung die feste Axe schneiden, oder zu derselben parallel sein muß, weil Gleichgewicht stattfindet. — Die Richtung dieser dritten Kraft ist aber nach der Voraussetzung nicht parallel zu der ganz willkürlichen festen Axe; schneidet sie also. — Wenn aber jede beliebige, die Richtungen der beiden ersten Kräfte schneidende Axe auch die Richtung der dritten Kraft durchschneiden muß, so müssen diese drei Kräfterichtungen nothwendig in derselben Ebene liegen. — Sie sind also entweder alle drei zu einander parallel, oder wenigstens zwei schneiden sich. In dem letzten Falle kann man sich den Durchschnittspunkt als fest denken, so daß die beiden betreffenden Kräfte aufgehoben werden und an dem Systeme blos ein fester Punkt und eine Kraft bleibt, deren Richtung nothwendig durch diesen Punkt gehen muß, weil nach der Voraussetzung Gleichgewicht stattfindet. —

Wenn man also weiß: daß ein System von Kräften einander das Gleichgewicht halten, und sich auf drei nicht parallele Kräfte zurückführen lassen, deren Richtungen folglich durch denselben Punkt gehen; so sind die Gleichgewichtsbedingungen dieselben, wie für Kräfte, welche auf denselben Punkt wirken, d. h. die Momentengleichungen fallen weg. —

§. 55. Aus §§. 18—53 erhellet: daß die Gleichgewichtsbedingungen offenbar dieselben sein würden, wenn man statt rechtwinkliger Coordinatenaxen schiefwinklige angewendet hätte. —

Es läßt sich sogar leicht zeigen: daß diese Gleichgewichtsbedin-

gungen noch dieselben bleiben, wenn man die Kräfte nach drei beliebigen geraden Linien zerlegt, welche nicht alle drei in derselben Ebene liegen und wovon keine zwei parallel sind. —

Denn die Componenten X, Y, Z hängen blos von der Richtung der drei erwähnten geraden Linien ab, und sind dieselben, wie für drei von demselben Punkte aus zu ihnen parallel gezogene Coordinatenaxen, so daß also $R = 0$, d. h.

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$$

sein muß — und nur noch das Kräftepaar G übrig bleibt. Bezeichnen nun α, β, γ die Winkel, welche die Axe von G mit den drei gedachten geraden Linien bildet, und man zerlegt G in zwei Componentenpaare, deren Axen resp. zu der ersten dieser Linien parallel und normal sind; so ist die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf diese Linien:

$$= G \cos \alpha.$$

Es muß folglich:

$$G \cos \alpha = 0,$$

und ebenso:

$$G \cos \beta = 0,$$

$$G \cos \gamma = 0;$$

also:

$$G = 0, \text{ d. h. } L = 0,\ M = 0,\ N = 0$$

sein. —

§. 55ª. Wir wollen noch den Fall betrachten, wo sich ein von beliebigen Kräften P_1, P_2, ... sollicitirter fester Körper in einem, oder in mehrern Punkten auf eine horizontale Ebene stützt. — Wenn man diese Ebene zu der der xy nimmt, und es sind x', y'; x'', y''; x''', y'''; ... die Coordinaten der Berührungspunkte des Körpers mit der Ebene, so wie R', R'', R''', ... die Druckkräfte in diesen Punkten, also $-R'$, $-R''$, $-R'''$, ... die Reactionen der Ebene; so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma. X = 0,\ \Sigma. Y = 0,\ \Sigma. Z - \Sigma. R' = 0 \\ L + \Sigma. R'y' = 0,\ M - \Sigma. R'x' = 0,\ N = 0. \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Wenn der Körper die Ebene nur in einem Punkte (x', y') berührt, so gibt die dritte der Gleichungen (α) den in diesem Punkte auf die Ebene ausgeübten Druck, und man hat die fünf Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma. X = 0, \Sigma. Y = 0,$$
$$L + y' \Sigma. Z = 0, M - x' \Sigma. Z = 0, N = 0.$$

Wenn der feste Körper die Ebene in zwei Punkten (x', y'), $(x'' y'')$ berührt, so hat man:

$$R'y' + R''y'' = -L, R'x' + R''x'' = M;$$

folglich:

$$R' = -\frac{Lx'' + My''}{y'x'' - x'y''},$$
$$R'' = \frac{Lx' - My'}{y'x'' - x'y''},$$

und die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\Sigma. X = 0, \Sigma. Y = 0,$$
$$\Sigma. Z + \frac{L(x'' - x') + M(y'' + y')}{y'x'' - x'y''} = 0,$$
$$N = 0.$$

Wenn sich der Körper in drei Punkten (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') auf die Ebene stützt, so werden die Druckkräfte in diesen Punkten durch die drei Gleichungen:

$$R' + R'' + R''' = \Sigma. Z,$$
$$R'y' + R''y'' + R'''y''' = -L,$$
$$R'x' + R''x'' + R'''x'' = M$$

bestimmt, und die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\Sigma. X = 0, \Sigma. Y = 0, N = 0.$$

Wenn der Körper die Ebene in mehr als drei Punkten berührt, so sind die in diesen Punkten auf dieselbe ausgeübten Druckkräfte unbestimmt, weil sie nur durch drei Gleichungen verbunden sind; aber die Gleichgewichtsbedingungen sind noch:

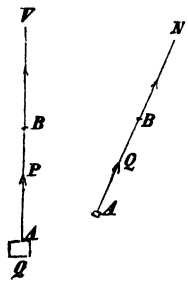
$$\Sigma. X = 0, \Sigma. Y = 0, N = 0.$$

In der Wirklichkeit findet jedoch diese Unbestimmtheit nicht statt, sondern es muß vielmehr in jedem Berührungspunkte ein völlig bestimmter Druck auf die Ebene ausgeübt werden. — Diese Unbestimmtheit rührt daher: daß die Ebene als absolut starr und unbiegsam vorausgesetzt ist, während sie in der Wirklichkeit immer mehr oder weniger biegsam ist. — Wenn man aber diese Biegsamkeit

in Rechnung ziehen will, so wird die Bestimmung der in den einzelnen Berührungspunkten stattfindenden Druckkräfte ein sehr schwieriges Problem, dessen allgemeine Lösung bis jetzt noch nicht gelungen ist. —

Arbeit — Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. —

§. 56. Wenn eine Kraft P den Angriffspunkt A eines Gewichtes Q durch die Länge $AB = H$ in der Vertikale AV bewegt, so sagt man: diese Kraft arbeite — und als Maß dieser Arbeit nimmt man das Produkt $Q.\ H$, so daß die Größe oder Quantität der Arbeit der Kraft P dieselbe bleibt, wenn dieses Produkt constant bleibt. —

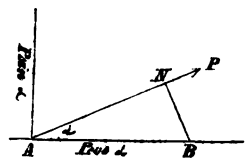


Nimmt man nämlich die Gewichtseinheit (ein Pfund) auf die Höhen- oder Längeneinheit (einen Fuß) gehoben, als Arbeitseinheit, so ist leicht einzusehen: daß das Produkt $Q.\ H$ der natürliche Ausdruck der Arbeit ist, welche dem Heben des Gewichtes Q auf die Höhe H entspricht; denn alsdann ist die zum Heben des Gewichtes Q auf die Höheneinheit erforderliche Arbeit $= Q$, und folglich die zum Heben dieses Gewichtes um H Längeneinheiten $= Q.\ H$.

Offenbar wird an dem Begriffe und dem Maße der Arbeit nichts geändert, wenn man für das Gewicht Q eine beliebige andere Druckkraft Q substituirt, welche nach einer beliebigen Richtung AN (s. ob. Fig.) wirkt, so daß, wenn ihr Angriffspunkt in ihrer eigenen Richtung durch die Länge $AB = H$ bewegt wird, die entsprechende Arbeit noch $= Q.\ H$ ist. —

Wenn also allgemein der Angriffspunkt einer stetigen Druckkraft P in ihrer eigenen Richtung durch eine Länge $= H$ bewegt wird, so ist die entsprechende Quantität Arbeit $= P.\ H$, und zwar soll sie als positiv, oder negativ genommen werden, jenachdem die Bewegung des Angriffspunktes mit der Druckkraft nach demselben, oder nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist. —

§. 57. Wenn die stets zu sich selbst parallel bleibende Richtung der Kraft P mit der, nach welcher ihr Angriffspunkt A



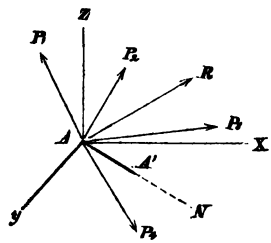
bewegt wird, einen Winkel α bildet; so kann man sich diese Kraft P in zwei Componenten $P \cos \alpha$, $P \sin \alpha$ zerlegt denken. Alsdann ist die der letzten Componente entsprechende Quantität Arbeit $= 0$, weil die nach ihrer Richtung geschätzte Bewegung des Angriffspunktes $= 0$ ist (§. 13.), und die der ersten Componente entsprechende Quantität Arbeit ist $= P \cos \alpha . AB = P . AB \cos \alpha = P . AN$, d. h. gleich dem Produkte aus der Kraft P und der Projektion des Weges des Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft P, oder auch gleich dem Produkte aus der Länge des Weges des Angriffspunktes und der Projektion der Kraft auf die Richtung dieses Weges. — Diese Quantität Arbeit ist positiv, oder negativ, jenachdem die Projektion des Weges des Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft selbst, oder auf ihre Verlängerung fällt. —

§. 58. Wir haben hier den Begriff der Arbeit blos in dem speciellen Falle zu betrachten, wo der von dem Angriffspunkte der Kraft beschriebene Weg unendlich klein ist, also immer als eine gerade Linie betrachtet werden kann. In diesem Falle kann sowohl die Intensität, wie die Richtung der Kraft als unveränderlich angesehen werden, wie die unendlich kleine Verrückung des Angriffspunktes auch sonst beschaffen sein mag. — Das Produkt aus der Kraft und aus der Projektion des unendlich kleinen Weges ihres Angriffspunktes auf ihre eigene Richtung heißt ihr Arbeitselement, oder ihr virtuelles Moment — und die unendlich kleine Verrückung des Angriffspunktes die virtuelle Geschwindigkeit desselben, welche aber zu der Kraft P in gar keiner Beziehung steht — und das Wort „virtuell" soll andeuten: daß hier nicht von wirklichen, sondern nur von möglichen Bewegungen die Rede ist. — Man denkt sich blos eine unendlich geringe Störung des Gleichgewichtes, um so eine Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht selbst zu erlangen. — Jedoch müssen auch die unendlich kleinen Verrückungen mit den Bedingungen des Systemes verträglich sein, was jedesmal der Fall ist, wenn auch die gerade entgegengesetzte Bewegung des Angriffspunktes möglich ist. — Wenn z. B. der Angriffspunkt einer Kraft auf einer Fläche bleiben

muß, so ist eine Verrückung desselben nach der Normale unzulässig. —

§. 59. Mit Hülfe des Begriffes des Arbeitselementes oder des virtuellen Momentes läßt sich nun leicht die allgemeinste Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht beliebiger Kräfte finden, welche 1) auf einen materiellen Punkt, 2) auf einen festen Körper, oder 3) auf ein System solcher Körper wirken. —

1) Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf denselben materiellen Punkt A wirken, so sei $AA' = ds$ das unendlich kleine Wegelement oder die virtuelle Geschwindigkeit desselben, R die Resultante, ϑ der Winkel, welchen ihre Richtung mit der von ds, d. h. mit AN bildet, welche gerade Linie wir zur Projektionsaxe nehmen wollen, und Θ_1, Θ_2, Θ_3, ... seien die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... mit AN bilden, sowie r, p_1, p_2, p_3, ... resp. die Projektionen von ds auf die Richtungen von R, P_1, P_2, P_3, ... Zerlegt man nun jede dieser Kräfte nach den drei rechtwinkligen Axen Ax, Ay, Az, welche mit AN die Winkel a, b, c bilden; so hat man nach §. 20:



$$R\cos\vartheta = \Sigma(P\cos\Theta) = (\Sigma X)\cos a + (\Sigma Y)\cos b + (\Sigma Z)\cos c,$$

also:

$$R\cos\vartheta\, ds = \Sigma(P\cos\Theta\, ds) = \Sigma(X\cos a\, ds) + \Sigma(Y\cos b\, ds) + \Sigma(Z\cos c\, ds),$$

d. h.:

$$R.r = \Sigma(P.p) = \Sigma(X\,dx) + \Sigma(Y\,dy) + \Sigma(Z\,dz) = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

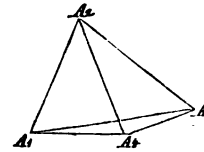
Sollen die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... im Gleichgewichte sein, so muß die Resultante $R = 0$ sein, und folglich ist die gesuchte Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\Sigma(P.p) = \Sigma(X\,dx + X\,dy + Z\,dz) = 0, \qquad (\alpha)$$

d. h. die algebraische Summe der virtuellen Momente oder der Arbeitselemente der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... oder die der Componenten derselben nach drei rechtwinkligen

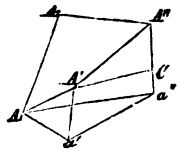
Axen muß = 0 sein. — Hierin besteht das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder richtiger: das Princip der virtuellen Momente oder der Arbeitselemente. —

2) Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf verschiedene Punkte A_1, A_2, A_3, ... desselben festen Körpers wirken, so entstehen nach den Verbindungslinien A_1A_2, A_1A_3, ... A_2A_3, ... sogenannte Spannungen, d. h. Kräfte, welche diese Linien zu verlängern, oder zu verkürzen



streben, und welche in Verbindung mit P_1, P_2, ... das Gleichgewicht herstellen, so daß, wenn der ganze Körper im Gleichgewichte ist, auch jeder einzelne Angriffspunkt A_1, A_2, ... für sich unter der Wirkung der betreffenden Kraft und Spannungen im Gleichgewichte ist. —

Wird nun der Körper unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so daß z. B. die Linie A_1A_2 in die Lage $A'A''$ kommt, so sind die Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten von A_1 und A_2 auf A_1A_2 einander gleich. Denn legt man durch A_1 eine auf A_1A_2 senkrechte Ebene, fällt auf dieselbe die Perpendikel Aa', $A''a''$ und zieht $A'C$ parallel zu $a'a''$; so ist offenbar die Verrückung von A_1 in der Richtung von A_1A_2 gleich Aa', und die von A_2 nach derselben Richtung geschätzt:



$$
\begin{aligned}
&= A''a'' - A_1A_2 = Aa' + A''C - A_1A_2 \\
&= Aa' + A'A' \cos A'A''C - A_1A_2 \\
&= Aa' - A'A' (1 - \cos A'A''C) \\
&= Aa',
\end{aligned}
$$

weil der Sinusversus eines unendlich kleinen Winkels $A'A''C$ ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist. — Die Spannungen, welche längs A_1A_2 auf A_1 und A_2 wirken, sind aber offenbar einander gleich und entgegengesetzt; folglich ist die algebraische Summe ihrer virtuellen Momente = 0, weil nach dem eben Bewiesenen die Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten von A_1 und A_2 auf A_1A_2, d. h. auf die Richtung der Spannungen, einander gleich sind. — Ebenso sind die algebraischen Summen der virtuellen Momente von je zwei der übrigen nach derselben geraden Linie gerichteten Spannungen = 0. Bezeichnen also T_1, T_2, T_3, ... die nach

$A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... gerichteten Spannungen, und t_1, t_2, t_3, ... die Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten von A_1, A_2, A_3, ... auf die Richtungen dieser Spannungen; so hat man nach Nr. 1. für das Gleichgewicht der einzelnen Angriffspunkte A_1, A_2, A_3, ...:

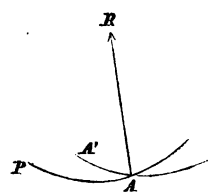
$$\left.\begin{aligned} P_1 p_1 + \Sigma_1 (T.t) &= 0 \\ P_2 p_2 + \Sigma_2 (T.t) &= 0 \\ P_3 p_3 + \Sigma_3 (T.t) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Addirt man nun die Gleichungen (β), so müssen sich die Glieder der Summen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... nach dem vorhin Gesagten paarweise aufheben, und es bleibt nur:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots = \Sigma (P.p)$$
$$= \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = 0. \quad (\alpha)$$

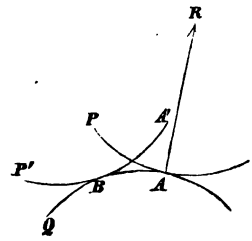
3) Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf verschiedene feste Körper wirken, welche ein unveränderliches System bilden, indem sie sich gegen feste Punkte, Curven, oder Flächen, oder gegen einander selbst stützen, u. s. w.; so ist im Gleichgewichtszustande des ganzen Systemes auch jeder einzelne Theil desselben unter der Wirkung der daran angebrachten äußeren Kräfte und der entstehenden Spannungen, Reactionen, u. s. w. für sich im Gleichgewichte. — Wird nun das System unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so ist, wie wir bereits gesehen haben, die algebraische Summe der virtuellen Momente der Spannungen $= 0$, und es läßt sich leicht zeigen: daß auch die den Reactionen, u. s. w. entsprechenden virtuellen Momente oder Arbeitselemente $= 0$, oder unendlich kleine Größen zweiter Ordnung sind, und folglich nicht in Betracht kommen.

Stützt sich z. B. ein Theil des Systemes mit einer vollkommen polirten Fläche PA gegen einen festen Punkt A, so übt dieser Punkt nach der Normale AR der Fläche eine Reaction R aus, und wenn man den betrachteten Theil unendlich wenig verrückt, jedoch so, daß die Fläche PA stets mit dem festen Punkte A in Berührung bleibt, und der Punkt A in die Lage A' kommt; so ist das virtuelle Moment



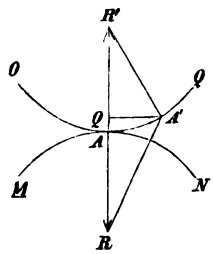
$= R.\ AA'.\ \cos RAA' = R.\ AA'.\ \sin PAA'$, d. h. eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, welche nicht in Betracht kommt. —

Wenn sich ein Körper des Systemes mit einer vollkommen glatten Oberfläche PA gegen eine ebenfalls vollkommen glatte krumme Linie oder Fläche QA stützt, so entsteht im Berührungspunkte A nach der Normale eine Reaction R, und wenn man diesen Körper unendlich wenig verrückt, so daß seine Berührungsfläche in die Lage $P'BA'$ kommt, B der neue Berührungspunkt und A' die neue Lage von A ist; so



ist das virtuelle Moment von $R = R.\ BA'.\ \sin ABA'$, d. h. wieder ein unendlich Kleines zweiter Ordnung. —

Wenn sich endlich zwei Theile des Systemes mit vollkommen polirten Oberflächen MAN, OAQ gegen einander stützen, so entstehen nach der Richtung der gemeinschaftlichen Normale RR' im Berührungspunkte A zwei gleiche und entgegengesetzte Druckkräfte $R = R'$, und wenn man beide Theile unendlich wenig verrückt, indem sie aber mit einander in Berührung bleiben; so sind die virtuellen Momente von R und R' offenbar einander gleich und von entgegengesetzten Zeichen, also ihre Summe $= 0$.



Hieraus erhellet: daß die virtuellen Momente oder Arbeitselemente der innern Kräfte (Spannungen, Reactionen, u. s. w.) nicht in der Gleichung der virtuellen Momente vorkommen können, und daß folglich die Gleichung (α) auch für das Gleichgewicht eines unveränderlichen Systemes von festen Körpern gilt. — Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder vielmehr der virtuellen Momente gewährt also den wesentlichen Vortheil, daß es die Gleichgewichtsbedingungen der auf ein festes System wirkenden äußern Kräfte P_1, P_2, P_3, ... gibt, ohne daß man die in dem Systeme entstehenden innern Kräfte zu betrachten braucht, insofern es sich blos um die Gleichgewichtsbedingungen handelt. —

§. 60. Der Zusammenhang zwischen den Angriffspunkten A_1, A_2, A_3, ... der Kräfte läßt sich immer durch eine, oder mehrere

Gleichungen zwischen den Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ derselben ausdrücken. Es seien z. B.:

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0,\ \ldots; \qquad (m)$$

diese Gleichungen, wo L_1, L_2, L_3, ... gegebene Funktionen der Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, ..., oder einiger derselben sind; so müssen auch die Werthe $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$; $x_2 + dx_2$, $y_2 + dy_2$, ... den Gleichungen (m) genügen, weil die unendlich kleinen Verrückungen der Angriffspunkte mit den Bedingungen des Systemes nach der Voraussetzung verträglich sein müssen. Man hat daher auch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_1}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dL_1}{dy_1}\,dy_1 + \frac{dL_1}{dz_1}\,dz_1 + \ldots &= 0,\\ \frac{dL_2}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dL_2}{dy_1}\,dy_1 + \frac{dL_2}{dz_1}\,dz_1 + \ldots &= 0,\\ \frac{dL^3}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dL_3}{dy_1}\,dy_1 + \frac{dL_3}{dz_1}\,dz_1 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

. . . . . .

Vermittelst dieser Gleichungen (n) eliminirt man aus der Gleichung (α) so viele der Größen dx_1, dy_1, dz_1; dx_2, dy_2, ..., als das System (n) Gleichungen hat; so sind die in (α) noch zurückbleibenden dieser Größen von einander unabhängig, und man muß folglich ihre Coefficienten einzeln $= 0$ setzen, wodurch man alle Gleichungen für das Gleichgewicht des Systemes erhält. — Wenn die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3, ..., d. h. die Werthe von x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, ... gegeben sind, so müssen die Componenten X_1, Y_1, Z_1; X_2, ... der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... diesen Gleichungen des Gleichgewichtes genügen. — Wenn dagegen die Kräfte der Größe und Richtung nach gegeben sind, und die Angriffspunkte, d. h. die Werthe von x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, ... gesucht werden; so geben dieselben Gleichungen in Verbindung mit (m) diese Werthe. —

Werden z. B. die Gleichgewichtsbedingungen für einen materiellen Punkt, welcher stets auf einer vollkommen glatten Fläche $z = f(x, y)$ bleiben muß, gesucht, wenn beliebige Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf denselben wirken, deren Componenten nach drei rechtwinkligen Axen $\Sigma.X$, $\Sigma.Y$, $\Sigma.Z$ sind; so gibt die Gleichung $z = f(x, y)$ durch Differenziirung:

$$dz = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy,$$

und wenn man diesen Werth von dz in die Gleichung:

$$\Sigma.\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0$$

der virtuellen Momente substituirt, so erhält man:

$$(\Sigma.\,X + \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dx})\,dx + (\Sigma.\,Y + \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dy})\,dy = 0;$$

folglich, weil dx und dy unabhängig von einander sind:

$$\Sigma.\,X + \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dx} = 0,$$

$$\Sigma.\,Y + \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dy} = 0$$

als die Gleichungen des Gleichgewichtes.

Wäre die Gleichung der Fläche, worauf der materielle Punkt stets bleiben muß, unter der Form $f\,(x, y, z) = 0$ gegeben, so wäre:

$$dz = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}\,dx - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}\,dy,$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung der virtuellen Momente substituirt; so ergeben sich die beiden Gleichungen des Gleichgewichtes:

$$\Sigma.\,X\,\frac{df}{dz} - \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dx} = 0,$$

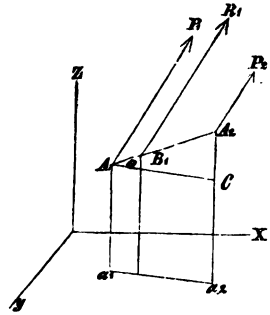
$$\Sigma.\,Y\,\frac{df}{dz} - \Sigma.\,Z\,\frac{df}{dy} = 0.$$

Ueberhaupt muß man bei der Anwendung der Gleichung der virtuellen Momente (α) nach der geometrischen Beschaffenheit des Systemes von den Größen dx_1, dy_1, dz_1, ... oder p_1, p_2, p_3, ... so viele als möglich als Functionen der übrigen zu finden suchen und ihre Ausdrücke in die Gleichung (α) substituiren. — Setzt man alsdann die Coefficienten der in der Gleichung (α) noch vorkommenden dieser Größen einzeln $= 0$, so erhält man die gesuchten Gleichungen des Gleichgewichtes. —

Uebrigens geht aus dem Vorhergehenden klar hervor: daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder vielmehr der virtuellen Momente, nur für unendlich kleine Verrückungen — und zwar nur bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung richtig ist. —

Mittelpunkt paralleler Kräfte. — Schwerpunkt. —

§. 61. Es seien P_1, P_2, P_3, ... Kräfte, welche im Raume beliebige, aber unter sich parallele Richtungen haben, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; ... die Coordinaten ihrer Angriffspunkte A_1, A_2, A_3, ... a_1, a_2, a_3, ... die Projektionen der letztern auf die Ebene der xy und x', y', z'; x'', y'', z''; ,.. die Coordinaten der Angriffspunkte B_1, B_2, ... der Resultanten aus P_1 und P_2, aus P_1, P_2 und P_3, ...; so hat man, wenn Θ den Neigungswinkel von $A_1 A_2$ gegen die Ebene der xy bezeichnet:



$$z' - z_1 = A_1 B_1 \sin \Theta,$$
$$z_2 - z' = A_2 B_1 \sin \Theta,$$

folglich:

$$\frac{z_2 - z'}{z' - z_1} = \frac{A_2 B_1}{A_1 B_1} = \frac{P_1}{P_2} \text{ (§§. 24 u. 25.)},$$

woraus folgt:

$$(P_1 + P_2)\, z' = P_1 z_1 + P_2 z_2. \qquad (\alpha)$$

Ebenso hat man für die Resultante $R_1 = P_1 + P_2$ und die dritte Kraft P_3:

$$(R_1 + P_3)\, z'' = R_1 z' + P_3 z_3,$$

d. h.: $$(P_1 + P_2 + P_3)\, z'' = (P_1 + P_2)\, z' + P_3 z_3$$
$$= P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3, \text{ wegen } (\alpha).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man, wenn $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante aus allen gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3, ... bezeichnen:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots.)\, \bar{z} = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \ldots.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{oder kürzer:} & \Sigma.\ P.\bar{z} = \Sigma.\ (Pz). \\ \text{Ebenso fände man:} & \Sigma.\ P.\bar{y} = \Sigma.\ (Py), \\ \text{und:} & \Sigma.\ P.\bar{x} = \Sigma.\ (Px). \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

Für die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ des Angriffspunktes der Resultante aller gegebenen Kräfte hat man folglich die Werthe:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma.\ (Px)}{\Sigma.\ P},\quad \bar{y} = \frac{\Sigma.\ (Py)}{\Sigma.\ P},\quad \bar{z} = \frac{\Sigma.\ (Pz)}{\Sigma.\ P}, \qquad (\gamma)$$

worin blos die Intensitäten dieser Kräfte und die Coordinaten ihrer Angriffspunkte vorkommen, so daß man für $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ stets dieselben Werthe erhält, wie sich auch die Richtung der Kräfte ändern mag, wofern sie nur unter sich parallel, so wie ihre Intensitäten und Angriffspunkte ungeändert bleiben. — Die Resultante geht also stets durch denselben Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, wenn sich die Kräfte, indem sie unter sich parallel bleiben, um ihre Angriffspunkte drehen, weshalb derselbe der Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt wird. (§. 24.) —

Aus den Gleichheiten (β) folgt: daß die Summe der Momente beliebiger paraller Kräfte in Beziehung auf eine beliebige Ebene dem Momente ihrer Resultante in Beziehung auf dieselbe Ebene gleich ist. — Geht also diese Ebene durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, so ist offenbar das Moment der Resultante, und folglich auch die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf diese Ebene gleich Null. —

Wenn $\Sigma.\ P = 0$ ist, so werden die Ausdrücke (γ) unendlich, d. h. es gibt alsdann keinen Mittelpunkt der parallelen Kräfte mehr. —

§. 62. Aus der Physik ist bekannt: daß die Schwere oder Schwerkraft auf alle Körper, und folglich auch auf ihre kleinsten Theilchen (Atome) mit gleicher Stärke wirkt. — Wenn also g die Intensität der Schwere an einem gewissen Orte (sie ändert sich bekanntlich mit diesem), M die Masse, W das Gewicht, V das Volumen und ϱ die Dichtigkeit eines Körpers bezeichnet; so hat man folgende Gleichungen:

$$M = \varrho.\ V,\ W = g\,M = g\,\varrho\,V.$$

§. 63. Da ferner die Richtungen, nach welchen die Schwere auf

die verschiedenen Theilchen eines Körpers wirkt, alle durch den Mittelpunkt der Erde gehen, so können sie wegen der großen Entfernung ihres Durchschnittspunktes gegen die Dimensionen der Körper, welche man gewöhnlich betrachtet, ohne merklichen Fehler als parallel angesehen werden, so daß also auf die verschiedenen Theilchen eines Körpers wegen der Schwere gleiche parallele Kräfte wirken, deren Intensität an demselben Orte constant bleibt. — Hieraus erhellet, daß es in jedem Körper einen Punkt geben muß, durch welchen die Resultante aus den Wirkungen der Schwere auf alle Theilchen des Körpers in jeder Lage des letztern beständig geht, welcher Punkt der Schwerpunkt des Körpers genannt wird. — Seine Lage in dem Körper ist offenbar von der Intensität der Schwere unabhängig; denn denkt man sich den Körper in seine n gleichen Atome, jedes von der Masse m, getheilt, so ist die auf jedes dieser Theilchen von der Schwere ausgeübte Kraft $= mg$ und wenn die Coordinaten der Angriffspunkte resp. mit $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ bezeichnet werden, so hat man nach den Formeln (γ) für die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des Schwerpunktes des Körpers:

$$\bar{x} = \frac{mgx_1 + mgx_2 + mgx_3 + \ldots}{mg + mg + mg + \ldots} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{n},$$

und ebenso:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots}{n},$$

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots}{n}.$$

§. 64. Wird der Schwerpunkt eines Körpers fest gemacht, so ist der Körper unter der alleinigen Wirkung der Schwere in jeder Lage im Gleichgewichte, weil die Resultante aus allen Einwirkungen der Schwere auf die verschiedenen Theilchen des Körpers, d. h. das Gewicht desselben, durch den festen Punkt aufgehoben wird. —

Der Körper ist auch im Gleichgewichte, wenn der feste Punkt nicht in dem Schwerpunkte, sondern in irgend einem andern Punkte der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikale liegt. —

Die Bestimmung des Schwerpunktes der Körper ist besonders

deshalb so wichtig, weil man sich ihr Gewicht in dem Schwerpunkte angebracht denken, und dann bei irgend einer Untersuchung von den Körpern abstrahiren kann. —

§. 65. Wenn man einen Körper von der Masse M in verschiedene Theile von den Massen m_1, m_2, m_3, ... zertheilt, so daß:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.$$

ist, und die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Theile sind resp. x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ....; so hat man für die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des Schwerpunktes des ganzen Körpers nach den Gleichungen (γ):

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{g m_1 . x_1 + g m_2 . x_2 + g m_3 x_3 + \ldots.}{g m_1 + g m_2 + g m_3 + \ldots.} \\ &= \frac{m_1 . x_1 + m_2 . x_2 + m_3 . x_3 + \ldots.}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.} \\ &= \frac{\Sigma . (m . x)}{\Sigma . m},\end{aligned}$$

und ebenso:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma . (m . y)}{\Sigma . m}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma . (m . z)}{\Sigma . m}.$$

Wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... die Dichtigkeiten und v_1, v_2, v_3, ... die Volumen der Massen m_1, m_2, m_3, ... bezeichnen; so hat man:

$$m_1 = \varrho_1 v_1, \quad m_2 = \varrho_2 v_2, \quad m_3 = \varrho_3 v_3, \ldots..,$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\varrho_1 v_1 . x_1 + \varrho_2 v_2 . x_2 + \varrho_3 v_3 . x_3 + \ldots.}{\varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + \varrho_3 v_3 + \ldots.} \\ &= \frac{\Sigma . (\varrho v . x)}{\Sigma . (\varrho v)},\end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

und ebenso:

$$\left.\begin{aligned}\bar{y} = \frac{\Sigma . (\varrho v . y)}{\Sigma . (\varrho v)}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma . (\varrho v . z)}{\Sigma . (\varrho v)}.\end{aligned}\right\}$$

Wenn $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \ldots$ d. h. die ganze Masse M homogen ist, so tritt der constante Factor ϱ aus dem Summenzeichen Σ heraus und hebt sich im Zähler und Nenner, so daß man hat:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma.(v.x)}{\Sigma.v}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma.(v.y)}{\Sigma.v}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma.(v.z)}{\Sigma.v}. \\ &= \frac{\Sigma.(v.x)}{V} \quad = \frac{\Sigma.(v.y)}{V} \quad = \frac{\Sigma.(v.z)}{V} \end{aligned}\right\} \qquad (\delta')$$

§. 66. Wenn man die Masse M als eine stetige betrachten kann, und man denkt sie sich in unendlich kleine Elemente dm oder ihr Volumen V in unendlich kleine Elemente dv zerlegt, so kann man jeden Punkt von dv als den Schwerpunkt von dm betrachten, weil die Coordinaten x, y, z der verschiedenen Punkte von dv sich nur um unendlich kleine Größen von einander unterscheiden. — In diesem Falle gehen offenbar die Formeln (δ) in folgende über:

$$\bar{x} = \frac{\int \varrho\, x\, dv}{\int \varrho\, dv}, \quad \bar{y} = \frac{\int \varrho\, y\, dv}{\int \varrho\, dv}, \quad \bar{z} = \frac{\int \varrho\, z\, dv}{\int \varrho\, dv}, \qquad (\varepsilon)$$

und die Gleichungen (δ') in folgende:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dv}{\int dv}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\, dv}{\int dv}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\, dv}{\int dv}. \qquad (\varepsilon')$$

In diesen Formeln muß man setzen:

$$dv = ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$$dv = ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx\, dy,$$

$$dv = dF = dx\, dy,$$

$$dv = dA = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx\, dy,$$

$$dv = dx.\, dy.\, dz,$$

jenachdem es sich um die Bestimmung des Schwerpunktes des Bogens einer Curve von einfacher, oder doppelter Krümmung, der Fläche einer ebenen Curve, oder einer krummen Oberfläche, oder endlich des Volumens eines Körpers handelt. —

Es versteht sich von selbst: daß von einem Schwerpunkte einer Linie, einer Fläche und eines Volumens nur insofern die Rede sein kann, als man sich in allen ihren Punkten gleiche parallele Kräfte angebracht, denkt. —

§. 67. Wenn ein Körper, oder ein System von Körpern un-

ter der alleinigen Wirkung der Schwere im Gleichgewichte ist, so ist die Höhe $\bar{z}$ seines Schwerpunktes über einer festen horizontalen Ebene, welche man immer als die der xy betrachten kann, so daß die z vertikal sind, im Allgemeinen ein Maximum, oder ein Minimum. —

Denn wenn $w_1 = m_1 g$, $w_2 = m_2 g$, $w_3 = m_3 g$, ... die Gewichte dieser Körper sind, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\bar{z} = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + \ldots.}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.}.$$

Erfährt nun das System eine mit seiner Beschaffenheit verträgliche unendlich kleine Verrückung, so daß $\bar{z}$, z_1, z_2, z_3, ... resp. in $\bar{z} + d\bar{z}$, $z_1 + dz_1$, $z_2 + dz_2$, ... übergehen; so hat man:

$$\bar{z} + d\bar{z} = \frac{w_1 (z_1 + dz_1) + w_2 (z_2 + dz_2) + w_3 (z_3 + dz_3) + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.},$$

folglich:

$$d\bar{z} = \frac{w_1 dz_1 + w_2 dz_2 + w_3 dz_3 + \ldots.}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.} = \frac{\Sigma (w. dz)}{\Sigma. w}.$$

Da nun nach dem Principe der virtuellen Momente (§. 59.)

$$\Sigma. (w. dz) = 0$$

ist, so folgt:

$$d\bar{z} = 0.$$

Mithin ist $\bar{z}$ ein Maximum, oder Minimum. —

§. 68. Da die Resultante oder das Gewicht $W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ des ganzen Systemes den Schwerpunkt desselben stets niederwärts zu bewegen strebt, so wird sie, wenn er etwas aus seiner tiefsten Lage entfernt, also seine Höhe $\bar{z}$ vergrößert wird, diese Höhe zu verkleinern, d. h. den Schwerpunkt wieder in seine tiefste Lage zu bringen streben, weshalb das Gleichgewicht bei der tiefsten Lage des Schwerpunktes des Systemes stabil, beharrlich genannt wird. —

Befindet sich dagegen das System bei der höchsten Lage des Schwerpunktes im Gleichgewichte, und wird etwas daraus entfernt,

so wird es durch die Kraft W nicht wieder in dieselbe zurückgeführt, sondern immer weiter davon entfernt, weshalb in diesem Falle das Gleichgewicht labil, momentan heißt. —

Wenn der Schwerpunkt des Systemes weder steigt, noch sinkt, indem das Gleichgewicht gestört wird; so bleibt das System im Gleichgewichte und wird ein neutrales oder indifferentes Gleichgewicht genannt. —

Guldin's Regeln. —

§. 69. Wenn sich eine ebene Figur von dem Inhalte A um eine in ihrer Ebene liegende Axe drehet, so ist das Volumen V des erzeugten Körpers $= L.A$, wo L die Länge des von dem Schwerpunkte der Fläche A durchlaufenen Weges bezeichnet, und seine Oberfläche $O = L'.U$, wo U den Umfang der Fläche A und L' die von seinem Schwerpunkte durchlaufene Länge bedeutet. —

Denn nimmt man die Ebene, in welcher A anfangs liegt, zur Ebene der xy und die Drehungsaxe, welche außerhalb der Fläche A liegen mag, zur Axe der x; so erzeugt das Element $dx\,dy$ von A bei der Drehung um den unendlich kleinen Winkel $d\Theta$ offenbar ein Volumen $= y\,d\Theta\,dx\,dy$, und folglich ist das bei der Drehung um den endlichen Winkel Θ durch die ganze Fläche A erzeugte Volumen

$$V = \int_0^\Theta \iint y\,d\Theta\,dx\,dy$$

$$= \Theta \iint y\,dx\,dy.$$

Die Ordinate $\bar{y}$ des Schwerpunktes von A ist aber:

$$\bar{y} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}, \text{ also } \bar{y}.\iint dx\,dy = \iint y\,dx\,dy,$$

folglich: $\bar{y}.\Theta \iint dx\,dy = \bar{y}\,\Theta.A = V = L.A.$

Ferner ist das bei der Drehung um den Winkel $d\Theta$ von dem Elemente ds von U erzeugte Oberflächenelement $= y\,d\Theta\,ds$, und folglich die von dem ganzen Umfange U bei der Drehung um den Winkel Θ erzeugte Oberfläche:

$$O = \int_0^\Theta \int y\,d\Theta\,ds = \Theta \int y\,ds.$$

Aber die Ordinate $\bar{y}$ des Schwerpunktes von U ist:

$$\bar{y} = \frac{\int y\, ds}{\int ds}, \text{ also } \bar{y} \int ds = \int y\, ds,$$

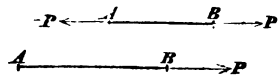
folglich:

$$O = \Theta \int y\, ds = \bar{y}\, \Theta . \int ds = L' U,$$

was zu beweisen war. —

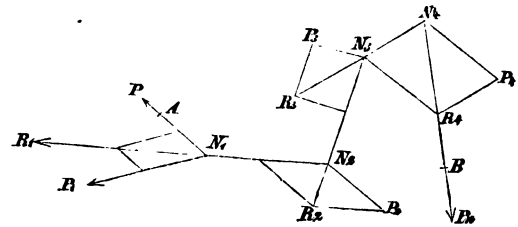
Seilpolygon — Kettenlinie. —

§. 70. Wenn an den beiden Endpunkten A, B eines vollkommen biegsamen Fadens oder Seiles zwei



gleiche Kräfte P, $-P$ nach entgegengesetztem Sinne wirken, so spannen sie denselben in eine gerade Linie aus, deren Richtung mit der der Kräfte zusammenfällt, und das System bleibt im Gleichgewichte. — Dasselbe ist der Fall, wenn der eine Endpunkt A des Fadens fest ist und an dem andern B eine Kraft P wirkt. Die Kraft P heißt in beiden Fällen die Spannung des Fadens, und muß positiv oder negativ, genommen werden, jenachdem sie als nach einem bestimmten Sinne, oder nach dem entgegengesetzten Sinne wirkend gedacht wird. —

Wenn aber nicht blos an den Endpunkten A, B, sondern auch



an bestimmten zwischenliegenden Punkten N_1, N_2, N_3, ... des Fadens oder Seiles Kräfte P_1, P_2, P_3, ... nach beliebigen Richtungen im Raume wirken, welche einander vermittelst des Fadens

oder Seiles das Gleichgewicht halten; so bildet dieser Faden oder dieses Seil ein Polygon, welches das Faden- oder Seilpolygon genannt wird — und es handelt sich darum: die Bedingungen zu finden, welchen die Intensitäten und Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... genügen müssen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, so wie, wenn dies der Fall ist, die Form des Vieleckes und die Spannnngen seiner verschiedenen Seiten zu finden. —

Zunächst ist klar: daß im Gleichgewichtszustande die äußersten Kräfte P, P_n nach den äußersten Polygonseiten $N_1 A$, $N_n B$ gerichtet sein müssen. — Verlegt man nun den Angriffspunkt der Kraft P nach N_1, so muß, da der Punkt N_1 im Gleichgewichte ist, die Resultante R_1 aus P und P_1 der Spannung T_1 nach $N_1 N_2$ gleich und direkt entgegengesetzt sein. Verlegt man weiter den Angriffspunkt von R_1 nach N_2 und setzt R_1, P_2 zu der Resultante R_2 zusammen, so daß R_2 die Resultante aus P, P_1, P_2 ist; so muß, da der Punkt N_2 im Gleichgewichte ist, R_2 der Spannung T_2 nach $N_2 N_3$ gleich und direkt entgegengesetzt sein. Setzt man diese successive Zusammensetzung der Kräfte und Verlegung der Angriffspunkte bis zu dem Punkte N_{n-1} oder der Kraft P_{n-1} fort, so muß die Resultante R_{n-1} aus P, P_1, P_2, P_3, ... P_{n-1} der letzten Kraft P_n gleich und direkt entgegengesetzt sein. Die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte P, P_1, P_2, ... P_n besteht also darin: daß, wenn sie parallel zu sich selbst in denselben Punkt N_{n-1} verlegt werden, ihre Resultante $R_n = 0$ ist.

Die Spannungen T, T_1, T_2, T_3, ... der Seiten AN, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, ... sind also resp. gleich P, R_1, R_2, R_3, ... d. h. resp. gleich den Resultanten aus P oder P_1, P_2, P_3, ... P_n, aus P, P_1 oder P_2, P_3, ... P_n, aus P, P_1, P_2 oder P_3, P_4, ... P_n u. s. w., wenn diese Kräfte parallel zu sich selbst resp. in die Punkte N_1, N_2, N_3, ... verlegt werden. —

Wenn die Kräfte P, P_1, P_2, P_3, ... P_n der obigen Bedingung genügen, so kann man auch leicht die Gleichgewichtslage des Polygones construiren. Denn da die Größe und Richtung der beiden Kräfte P, P_1 bekannt ist; so kann man ihre Resultante R_1 leicht construiren, und wenn man auf ihrer rückwärts verlängerten Richtung eine Länge $= N_1 N_2$ nimmt; so hat man die zweite Seite des Seilpolygones. Setzt man weiter in N_2 die Kräfte R_1 und P_2 zu einer Resultante R_2 zusammen, und nimmt auf ihrer rückwärts

verlängerten Richtung eine Länge $= N_2 N_3$, so hat man die dritte Seite des gesuchten Polygones, u. s. f.

§. 71. Statt der Construction kann man auch Rechnung anwenden. Denn bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots$ resp. die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ mit drei rechtwinkligen Axen bilden, so wie $a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \ldots$ die Winkel, welche die Seiten des Vieleckes oder die Richtungen der Spannungen $T, T_1, T_2, T_3, \ldots$ mit denselben Axen bilden; so hat man nach dem Vorhergehenden offenbar folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
P\cos\alpha + T\cos a = 0 \\
P_1\cos\alpha_1 - T\cos a + T_1\cos a_1 = 0 \\
P_2\cos\alpha_2 - T_1\cos a_1 + T_2\cos a_2 = 0 \\
P_3\cos\alpha_3 - T_2\cos a_2 + T_3\cos a_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n\cos\alpha_n - T_{n-1}\cos a_{n-1} = 0. \\
P\cos\beta + T\cos b = 0 \\
P_1\cos\beta_1 - T\cos b + T_1\cos b_1 = 0 \\
P_2\cos\beta_2 - T_1\cos b_1 + T_2\cos b_2 = 0 \\
P_3\cos\beta_3 - T_2\cos b_2 + T_3\cos b_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n\cos\beta_n - T_{n-1}\cos b_{n-1} = 0. \\
P\cos\gamma + T\cos c = 0 \\
P_1\cos\gamma_1 - T\cos c + T_1\cos c_1 = 0 \\
P_2\cos\gamma_2 - T_1\cos c_1 + T_2\cos c_2 = 0 \\
P_3\cos\gamma_3 - T_2\cos c_2 + T_3\cos c_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n\cos\gamma_n - T_{n-1}\cos c_{n-1} = 0.
\end{array}\right\} (i)$$

Die letzte Gleichung jeder dieser drei Gruppen ist jedoch nur eine Folge aus den ihr vorangehenden n Gleichungen; denn wenn man z. B. die n ersten Gleichungen der ersten Gruppe zusammenaddirt, so erhält man:

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots + P_{n-1}\cos\alpha_{n-1} + T_{n-1}\cos a_{n-1} = 0,$$

folglich:

$$-P_n\cos\alpha_n + T_{n-1}\cos\alpha_{n-1} = 0,$$

weil $R_n = 0$, also auch:

$$P \cos\alpha + P_1 \cos\alpha_1 + \ldots + P_{n-1}\alpha_{n-1} + P_n \cos\alpha_n = 0,$$

mithin:

$$P \cos\alpha + P_1 \cos\alpha_1 + \ldots + P_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = -P_n \cos\alpha_n$$

ist. Man hat also nur $3n$ verschiedene Gleichungen, zu welchen aber noch die bekannten n Relationen kommen:

$$\begin{array}{l} \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 \\ \cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (k)$$

so daß man zur Bestimmung der n Spannungen T, T_1, T_2, T_3, ... und der $3n$ Cosinus $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$; $\cos a_1$, $\cos b_1$; .... auch $4n$ Gleichungen hat. —

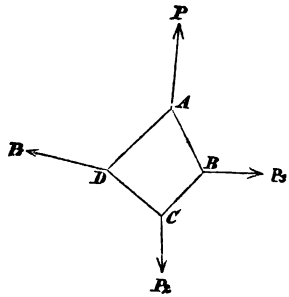
Wenn ein Endpunkt A (letzte Fig. S. 61.) des Seilpoligones fest ist, so kann der Widerstand dieses Punktes als eine Kraft von einer beliebigen Stärke und Richtung betrachtet werden; folglich kann sich das Seilpolygon im Gleichgewichte befinden, welche Richtung und Stärke die an den übrigen Punkten desselben angebrachten Kräfte auch haben mögen. —

Wenn beide Endpunkte A, B (dieselbe Fig.) des Polygones fest sind, so bezeichne L ihre gegenseitige Entfernung und l, l_1, l_2, l_3, ... seien die Längen der Seiten des Vieleckes, so wie λ, μ, ν die Winkel, welche L mit den Coordinatenaxen bildet. Alsdann ist die Summe der Projektionen der Seiten l, l_1, l_2, .. auf jede Axe gleich den Projektion von L auf dieselbe Axe (§. 20.) d. h.:

$$\Sigma.(l \cos a) = L \cos\lambda,\ \Sigma.(l \cos b) = L \cos\mu,\ \Sigma.(l \cos c) = L \cos\nu.$$

Aus den Gleichungen (i) müssen aber die sechs mit P und P_n hinweggelassen werden, weil in dem gegenwärtigen Falle P, P_n, α, β, γ; α_n, β_n, γ_n nicht gegeben sind. — Die $3n - 3$ übrigen der Gleichungen (i), die n Relationen (k) und die 3 letzten Gleichungen bestimmen jedoch die $4n$ Unbekannten T, T_1, T_2, ... $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$; $\cos a_1$, $\cos b_1$, ... vollständig. —

§. 72. Wenn das Seilpolygon geschlossen und z. B. ein



Viereck *ABCD* iſt, an deſſen Winkelſpitzen die Kräfte P, P_1, P_2, P_3 wirken; ſo hat man offenbar die folgenden 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P\cos\alpha &+ T\cos a &- T_3\cos a_3 &= 0,\\
P_1\cos\alpha_1 &+ T_1\cos a_1 &- T\cos a &= 0,\\
P_2\cos\alpha_2 &+ T_2\cos a_2 &- T_1\cos a_1 &= 0,\\
P_3\cos\alpha_3 &+ T_3\cos a_3 &- T_2\cos a_2 &= 0,
\end{aligned}$$

wovon aber die letzte eine Folge aus den 3 erſten iſt; denn wenn man dieſe addirt und die Relation:

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 = 0,$$

alſo: $P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 = -P_3\cos\alpha_3$

berückſichtigt, ſo ergibt ſich:

$$-P_3\cos\alpha_3 - T_3\cos a_3 - T_2\cos a_2 = 0.$$

Ebenſo hat man die 6 analogen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P\cos\beta &+ T\cos b &- T_3\cos b_3 &= 0,\\
P_1\cos\beta_1 &+ T_1\cos b_1 &- T\cos b &= 0,\\
P_2\cos\beta_2 &+ T_2\cos b_2 &- T_1\cos b_1 &= 0,\\
P\cos\gamma &+ T\cos c &- T_3\cos c_3 &= 0,\\
P_1\cos\gamma_1 &+ T_1\cos c_1 &- T\cos c &= 0,\\
P_3\cos\gamma_2 &+ T_2\cos c_2 &- T_1\cos c_1 &= 0,
\end{aligned}$$

und da in dem gegenwärtigen Falle $L = 0$ iſt; ſo hat man auch die 3 Relationen:

$$\Sigma(l\cos a) = 0,\ \Sigma(l\cos b) = 0,\ \Sigma(l\cos c) = 0,$$

ſo wie endlich die 4 Relationen:

$$\begin{aligned}
\cos^2 a &+ \cos^2 b &+ \cos^2 c &= 1,\\
\cos^2 a_1 &+ \cos^2 b_1 &+ \cos^2 c_1 &= 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

also im Ganzen 16 Gleichungen zur Bestimmung der 16 unbekannten Größen T, T_1, T_2, T_3, $\cos a$, $\cos b$, ...

§. 73. Wenn im Gleichgewichtszustande die rückwärts verlängerte Richtung der Kraft P_1 den Winkel AN_1N_2 (s. die Figur auf S. 61.) halbirt, so muß auch $T = T_1$ sein, weil die Resultante aus T, T_1 der Kraft P_1 gleich und direkt entgegengesetzt sein, also den Winkel AN_1N_2 ebenfalls halbiren muß. — Es ist also:

$$P_1 = 2\ T \cos \tfrac{1}{2}\omega,$$

wo $\angle AN_1N_2 = \omega$ gesetzt ist. Ist ferner $l = l_1$ und r der Halbmesser des um das Dreieck AN_1N_2 beschriebenen Kreises, so ist:

$$2r \cos \tfrac{1}{2}\omega = l, \text{ also } r = \frac{l}{2 \cos \frac{1}{2}\omega}$$

folglich:

$$P_1.r = T.l.$$

Wenn die rückwärts verlängerte Richtung der Kraft P_2 den Winkel $N_1N_2N_3$ ebenfalls halbirt, so ist auch $T_2 = T_1$, folglich $T = T_1 = T_2$; und so fort. Wenn also alle Winkel des Vieleckes von den Richtungen der an ihnen wirkenden Kräfte halbirt werden, so ist $T = T_1 = T_2 = T_3 = \ldots$. d. h. die Spannung des Fadens oder Seiles überall dieselbe — und wenn auch $l = l_1 = l_2 = l_3 = \ldots$. ist; so ist:

$$P_1.r = P_2.r = P_3.r = \ldots = T.l,$$

oder:

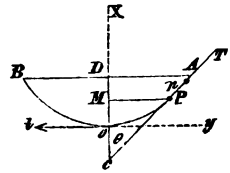
$$P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = \frac{T.l}{r}.$$

Diese Resultate behalten ihre Gültigkeit, wie klein l auch sein mag. — Denkt man sich also über eine glatte krumme Fläche einen vollkommen biegsamen Faden gespannt, so muß der Druck, welchen der Faden in jedem Punkte auf die Fläche ausübt, mit dem Widerstande der Fläche im Gleichgewichte, also nach der Normale gerichtet sein. Dieser Druck ist aber nichts anders, als die Resultante aus den Spannungen zweier benachbarter unendlich kleiner Elemente ds des Fadens, welche in ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte angebracht ist, in ihrer Ebene oder der des Krümmungskreises liegt, und folglich nach der Richtung des Krümmungshalbmessers wirkt, weil er zugleich auf der Curve normal ist. — Der Faden

muß also auf der krummen Fläche eine solche Lage annehmen, daß der Krümmungshalbmesser der von ihm gebildeten Curve mit der Normale der krummen Fläche zusammenfällt. Die Richtung des Druckes oder Widerstandes *halbirt* also den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Curvenelementen ds; folglich ist die Spannung T des Fadens *überall dieselbe* und der Druck $P = \frac{T\,ds}{r}$, also in jedem Punkte des Fadens der Spannung T und der Krümmung $\frac{1}{r}$ desselben proportional. —

§. 74. Wenn sich der Angriffspunkt N_1 (s. die Fig. auf S. 61.) der Kraft P_1 längs des Fadens oder Seiles *frei bewegen* kann, indem die *Richtung* der Kraft P_1 *dieselbe* bleibt; so muß er im Gleichgewichtszustande eine solche Lage haben: daß die Richtung der Kraft den Winkel $AN_1N_2 = \omega$ *halbirt*. — Denn alsdann sind die Spannungen T, T_1 von l, l_1 einander gleich, nämlich $T = T_1 = P_1 \cos \frac{1}{2}\omega$, und folglich ist ihre Resultante der Kraft P_1 gleich und *direkt entgegengesetzt*, wie es das Gleichgewicht des Punktes N_1 fordert, was nur in *dieser einen* Lage des Punktes N_1 der Fall ist. —

§. 75. Wir haben bisher die Faden- oder Seilstücke als *unausdehnbar* angenommen, was aber in der Wirklichkeit *nicht* der Fall ist; denn die Erfahrung lehrt: daß sie sich unter der Wirkung spannender Kräfte *verlängern* — und zwar ist die Verlängerung der *Länge* des Fadens oder Seiles und der *Intensität* der spannenden Kraft proportional, wenn der Faden oder das Seil homogen und überall von gleicher Dicke ist, und die Intensität der Spannkraft sich der Größe nicht zu sehr nähert, bei welcher der Faden oder das Seil *zerreißen* würde. — Wenn aber das Polygon mit *ausdehnbaren* Seiten in den Gleichgewichtszustand gelangt ist, und die Seiten desselben sich den auf sie wirkenden Spannkräften entsprechend verlängert haben; so kann, so lange diese Kräfte dieselben bleiben, auch jede Seite als *unveränderlich* betrachtet werden. Mithin gelten die obigen Gleichungen auch für ein Polygon mit *ausdehnbaren* Seiten, wofern man für l, l_1, l_2, ... resp. $l(1 + \lambda T)$, $l_1(1 + \lambda T_1)$, $l_2(1 + \lambda T_2)$, ... setzt, wo der Coefficient λ von der Dicke und Substanz des Faden oder Seiles abhängt und durch Versuche bestimmt werden muß. —



§. 76. Es sei *AOB* ein schwerer Faden, ein schweres Seil, oder eine schwere Kette, wovon die Endpunkte *A*, *B* fest liegen; so ist klar: daß dieser Faden unter der Wirkung der Schwere allein eine ebene Curve *AOB* bilden wird, wenn die Länge $2S$ desselben größer ist, als die gegenseitige Entfernung $AB = 2a$ der festen Punkte *A*, *B*, welche der Einfachheit wegen als in derselben Horizontale liegend angenommen werden. Diese Curve heißt die Kettenlinie; *O* sei ihr tiefster, *P* ein beliebiger Punkt derselben, $OM = x$ vertikal, $MP = y$ horizontal und $OP = s$ ein beliebiger von *O* aus gezählter Bogen der Kettenlinie, welche wir zunächst als von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit annehmen wollen. —

Wenn sich die Kette oder der Faden im Gleichgewichte befindet, so wird dasselbe offenbar nicht gestört, wenn man sich einen Theil *OP* als starr denkt, welcher sich alsdann unter der Wirkung dreier Kräfte, nämlich der nach den Tangenten in *O* und *P* gerichteten Spannungen t, T und seines eigenen Gewichtes W im Gleichgewichte befindet. Da die Richtungen dieser drei Kräfte resp. zu den drei Seiten des Dreieckes *MPC* parallel sind, so verhalten sich ihre Intensitäten wie diese Seiten (§. 17.), und man hat daher:

$$\frac{t}{W} = \frac{PM}{MC} = \frac{dy}{dx}.$$

Weil aber die Kette von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit ist, so kann man W durch die Länge s von *OP* und t ebenfalls durch eine gewisse Länge c der Kette ausdrücken, so daß man hat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{s};$$

folglich:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{s},$$

also:

$$dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}}$$

und:

$$x + c = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \sqrt{c^2 + s^2}, \qquad (\mu)$$

weil für $x = 0$ auch $s = 0$ ist. Es ist folglich:

$$s^2 = x^2 + 2cx, \text{ also } s = \sqrt{x^2 + 2cx}; \qquad (\mu')$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{s} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + 2cx}},$$

also:

$$y = \int \frac{c\,dx}{\sqrt{x^2 + 2cx}} = c.\,\overset{e}{log}\left(\frac{x + c + \sqrt{x^2 + 2cx}}{c}\right), \quad (1)$$

weil x und y zugleich verschwinden müssen.

Diese Gleichung der Kettenlinie läßt sich auch noch auf eine andere Form bringen; denn nach derselben ist:

$$e^{\frac{y}{c}} = \frac{x + c}{c} + \sqrt{\left(\frac{x + c}{c}\right)^2 - 1},$$

also:

$$e^{\frac{y}{c}} - \frac{x + c}{c} = \sqrt{\left(\frac{x + c}{c}\right)^2 - 1},$$

und beiderseits zum Quadrat erhoben:

$$e^{\frac{2y}{c}} - 2.\,e^{\frac{y}{c}}.\,\frac{x + c}{c} = -1,$$

folglich:

$$x + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right). \qquad (1')$$

Weiter ist also:

$$(x + c)^2 = \frac{c^2}{4}\left(e^{\frac{2y}{c}} + 2 + e^{-\frac{2y}{c}}\right),$$

und:

$$(x + c)^2 - c^2 = \frac{c^2}{4}\left(e^{\frac{2y}{c}} - 2 + e^{-\frac{2y}{c}}\right) = \frac{c^2}{4}\left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right)^2;$$

folglich wegen (μ'):

$$\sqrt{(x + c)^2 - c^2} = s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right). \qquad (2)$$

Die Gleichungen (1), (1') und (2) bleiben offenbar dieselben,

wenn die festen Punkte A, B auch nicht in derselben Horizontale liegen, sondern B etwa in B_1. —

Ferner hat man:

$$\frac{PC}{MC} = \frac{T}{W} = \frac{T}{s} = \frac{ds}{dx}, \text{ also } T = \frac{s\,ds}{dx}.$$

Aus (μ'), d. h. $s^2 = x^2 + 2cx$ folgt aber:

$$\frac{s\,ds}{dx} = x + c; \text{ also ist: } T = x + c, .$$

was sich auch aus $T = \sqrt{c^2 + s^2}$ und $x + c = \sqrt{c^2 + s^2}$ ergibt. — Die horizontalen und vertikalen Componenten der Spannung T in einem beliebigen Punkte P der Kettenlinie sind offenbar $= t = c$ und $= s$.

Wenn man in der Gleichung (2) zugleich $y = a$ und $s = S$ setzt, so erhält man zur Bestimmung von $c = t$ die Gleichung:

$$S = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}\right), \qquad (3)$$

welche man durch die Methode der successiven Versuche für c auflösen suchen muß. — Man kann aber auch leicht eine andere Form erhalten; denn es ist offenbar:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}, \text{ folglich } \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}},$$

mithin:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}}, \quad dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}},$$

also:

$$y = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}} = c\,\mathring{log}\left(\frac{s}{c} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}\right),$$

oder wegen $cotg\,\Theta = \frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}$, also $c = \frac{s}{cotg\,\Theta} = s\,tang\,\Theta$:

$$y = s\,tang\,\Theta.\,\mathring{log}\,(cotg\,\Theta + \sqrt{1 + cotg^2\,\Theta}),$$

oder:

$$\frac{y}{s} = tang\,\Theta.\,\mathring{log}\,(cotg\,\Theta + \frac{1}{sin\,\Theta})$$

$$= tang\ \Theta .\ \overset{e}{log}\ cotg\ \frac{\Theta}{2} = -\ tang\ \Theta\ \overset{e}{log}\ tang\ \frac{\Theta}{2}$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung gleichzeitig $y = a$, $s = S$ setzt, und den zugehörigen Werth von Θ mit Θ_1 bezeichnet; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} -\ tang\ \Theta_1 .\ \overset{e}{log}\ tang\ \frac{\Theta_1}{2} &= \frac{a}{S}, \\ \text{und:} \qquad\qquad & \\ c &= S .\ tang\ \Theta_1 . \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Löst man also die erste dieser beiden letzten Gleichungen durch irgend eine Methode näherungsweise für Θ_1 auf, so gibt die zweite den Werth von $c = t$, d. h. die Spannung im tiefsten Punkte O der Kettenlinie.

Aus der Gleichung (μ) folgt:

$$x = \sqrt{c^2 + s^2} - c,$$

und aus (μ'):

$$s = \sqrt{x\,(x + 2c)}.$$

Setzt man in diesen beiden letzten Gleichungen gleichzeitig $x = OD = H$, und $s = S$, so erhält man:

$$H = \sqrt{c^2 + S^2} - c, \qquad (\nu)$$

und:

$$S = \sqrt{H\,(H + 2c)}. \qquad (\nu')$$

Die Gleichung (ν) gibt also den Abstand H des tiefsten Punktes der Kettenlinie von der durch die Aufhängepunkte A, B gehenden Horizontale AB, so bald S gegeben und c nach der Gleichung (3) oder (3') bestimmt ist. — Wenn aber H gegeben und S gesucht wird, so muß man c erst durch die Gleichung:

$$\frac{c}{2}\,(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) = \sqrt{H\,(H + 2c)},$$

welche sich aus (3) und (ν') ergibt, oder durch die Gleichung:

$$\frac{c}{2}\,(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}) - c = \frac{c}{2}\,(e^{\frac{a}{c}} - 2 + e^{-\frac{a}{c}})$$

$$= \frac{c}{2}\,(e^{\frac{a}{2c}} - e^{-\frac{a}{2c}})^2 = H,$$

welche sich aus (1′) ergibt, wenn man zugleich $y = a$, $x = H$ setzt, bestimmen und den gefundenen Werth in (ν) oder (ν′) substituiren.

Aus $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{s}$ und $T = x + c$, also $dT = dx$ folgt ferner:

$$s\,dy = c\,dT, \text{ also } s = \frac{c\,dT}{dy},$$

folglich:

$$ds\,dy + s\,d^2y = 0,$$

und für s seinen Werth $\frac{c\,dT}{dy}$ substituirt, gibt:

$$ds\,dy + \frac{c\,dT\,d^2y}{dy} = 0,$$

oder:

$$ds\,dy^2 + c\,dT\,d^2y = 0.$$

Es ist aber $\frac{dy}{ds} = \frac{c}{T}$, folglich $dy^2 = \frac{c^2\,ds^2}{T^2}$, und wenn man diesen Werth für dy^2 in die letzte Gleichung setzt:

$$c\,ds^3 + T^2 dT\,d^2y = 0,$$

oder:

$$-\frac{ds^3}{d^2y\,dT} = -\frac{ds^3}{d^2y\,dx} = \frac{T^2}{c} = R,$$

wo R den Krümmungshalbmesser bezeichnet. — Für den tiefsten Punkt O ist $T = c$, folglich $R = c$, d. h. in einem beliebigen Punkte P der Kettenlinie ist die Spannung T eine mittlere Proportionale zwischen dem Gewichte eines Stückes der Kette von der Länge des Krümmungshalbmessers für diesen Punkt und der Spannung c im tiefsten Punkte O der Kette, indem letztere dem Gewichte eines Stückes der Kette gleich ist, welches die Länge des Krümmungshalbmessers in diesem tiefsten Punkte hat. —

Wenn man den zweiten Theil der Gleichung:

$$1 + \frac{x}{c} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right)$$

in eine Reihe entwickelt, so erhält man:

$$\frac{x}{c} = \frac{y^2}{2\,c^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4.c^4} + \ldots.$$

Wenn y sehr klein ist, d. h. in der Nähe des tiefsten Punktes O, kann man näherungsweise setzen:

$$y^2 = 2cx,$$

und folglich fällt die Kettenlinie an dieser Stelle nahezu mit einer Parabel zusammen. —

Die Kettenlinie von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit hat ferner die Eigenschaft: daß ihr Schwerpunkt in der Gleichgewichtslage am tiefsten unter der Horizontale AB liegt, d. h. er liegt tiefer, als wenn man der Kette irgend eine andere Form als die der Kettenlinie gibt. — Denn wenn man die Kette aus ihrer Gleichwichtslage entfernt, so sucht sie wieder in dieselbe zurückzukehren; folglich ist ihr Gleichgewicht stabil, mithin die Höhe ihres Schwerpunktes über tOx ein Minimum, oder seine Tiefe unter AB ein Maximum (§. 68).

§. 77. Aus dem Vorhergehenden erhellet: daß in einer gleichförmig dichten und dicken Kettenlinie die Spannung von dem tiefsten bis zu dem Aufhängepunkte zunimmt, also die Haltbarkeit der Kette in demselben Sinne abnimmt — und wir wollen deshalb jetzt die Kettenlinie betrachten, welche in allen Punkten dieselbe Haltbarkeit hat, deren Querschnitt sich also bei derselben Dichtigkeit wie die Spannung ändert. —

Wenn die frühern Bezeichnungen beibehalten werden und S jetzt die Länge einer Kette bezeichnet, deren constante Dicke der der Kette mit veränderlichem Querschnitte in ihrem tiefsten Punkte, und deren Gewicht dem Gewichte einer Länge s der letztern gleich ist; so hat man offenbar:

$$\frac{T}{t} = \frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{c}.$$

Da aber die Dichtigkeit dieselbe ist, so verhalten sich die Dicken oder Querschnitte wie die Massen oder Gewichte zweier unendlich kleiner Längen dS, ds, und folglich hat man, weil sich die Dicken oder Querschnitte wie die Spannungen verhalten sollen:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{c},$$

also:

$$ds = \frac{c\,dS}{\sqrt{c^2 + S^2}},$$

und: $$s = \int \frac{c\,dS}{\sqrt{c^2 + S^2}} = c.\,\overset{e}{log}.\left(\frac{S + \sqrt{c^2 + S^2}}{c}\right).$$

Ferner hat man:

$$\frac{c}{S} = \frac{MP}{MC} = \frac{dy}{dx};\ \text{folglich:}\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{S},$$

und:

$$\frac{dS}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{c}\cdot\frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{S},$$

d. h.:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{c^2 + S^2}{cS},\ \text{also}\ dx = \frac{cS\,dS}{c^2 + S^2},$$

mithin:

$$x = \int \frac{cS\,dS}{c^2 + S^2} = c.\,\overset{e}{log}\left(\frac{\sqrt{c^2 + S^2}}{c}\right).$$

Oder:

$$\frac{dy}{dS} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dS} = \frac{c}{S}\cdot\frac{cS}{c^2 + S^2} = \frac{c^2}{c^2 + S^2},$$

folglich:

$$y = c.\,arc\,tang.\,\frac{S}{c},\ \text{oder:}\ S = c.\,tang\,\frac{y}{c}.$$

§. 78. Wenn sich nicht blos der Querschnitt ω, sondern auch die Dichtigkeit ϱ ändert, so ist $\varrho\omega\,ds = m\,ds$ die Masse des Elementes $ds = Pp$ (Fig. auf S. 68.) der Kette, wo wir der Kürze wegen $m = \varrho\omega$ die Querschnittsmasse nennen wollen. Alsdann ist das Gewicht des Elementes $ds = g\,m\,ds$, folglich das des Bogens $OP = s = g\int_0^s m\,ds$, und wenn $t = g.c$ gesetzt wird; so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gc}{g\int_0^s m\,ds} = \frac{c}{\int_0^s m\,ds}, \qquad (\alpha)$$

also:

$$y = \int \frac{c\,dx}{\int_0^s m\,ds},\ \text{oder}\ x = \int\left(\frac{1}{c}\int_0^s m\,ds\right)dy,$$

woraus sich die Gleichung der Kettenlinie durch Integration ergibt, sobald m als eine Function von x, y oder s gegeben ist. —

Umgekehrt, wenn diese Gleichung gegeben ist, so läßt sich auch leicht m, d. h. das Querschnittsmassengesetz finden; denn aus (α) folgt:

$$\int_0^s m\,ds = c.\,\frac{dx}{dy},$$

also:

$$m\,\frac{ds}{dy} = c.\,\frac{d^2x}{dy^2},$$

folglich:

$$m = c.\,\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\frac{ds}{dy}}.$$

Ferner ist:

$$T = t\,\frac{ds}{dy}.$$

§. 79. Wir wollen nun einen gleichförmig dicken und dichten Faden betrachten, welcher auf einer gegebenen Fläche $u = f(x, y, z) = 0$ liegt, und auf welchen in jedem Punkte beliebige Kräfte P wirken, die als Functionen der Coordinaten ihrer Angriffspunkte gegeben sind. —

Die Componenten der Spannung T an den beiden Endpunkten eines beliebigen Elementes ds des Fadens nach der Axe der x sind offenbar respective:

$$T\,\frac{dx}{ds} \text{ und } T\,\frac{dx}{ds} + d\,(T\,\frac{dx}{ds}),$$

folglich ihr Unterschied $= d\,(T\,\frac{dx}{ds})$; also unendlich klein.

Ebenso sind die Unterschiede der an dem Elemente ds wirkenden Kräfte P unendlich klein; folglich auch die ihrer Componenten X nach der Axe der x. Diese Componenten sind also gleich und parallel; folglich ihre Resultante der Länge des Elementes ds proportional, d. h. $= X ds$.

Bezeichnet ferner R den Widerstand oder die Reaction der Fläche, worauf der Faden liegt, in einem Punkte (x, y, z), welcher nach der Richtung der Normale in diesem Punkte erfolgt, und bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche diese Richtung mit den Axen der x, y, z bildet; so

ergibt sich ebenso: daß die Componenten $R\cos\alpha$ nach der Axe der x für das Element ds eine Resultante $= R\cos\alpha\, ds$ geben. —

Die Kräfte $d\left(T\frac{dx}{ds}\right)$, Xds und $R\cos\alpha\, ds$ kann man sich in jedem beliebigen Punkte, etwa in der Mitte, des Elementes ds angebracht denken. — Wenn das Gleichgewicht stattfindet, so kann man sich das Element ds als starr oder fest denken, und man hat (§. 19):

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds + R\cos\alpha.\, ds = 0,$$

oder:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X + R\cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

und ebenso in Beziehung auf die Axen der y, z:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y + R\cos\beta = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z + R\cos\gamma = 0. \qquad (3)$$

Bildet man zunächst:

$$(1)\,\frac{dx}{ds} + (2)\,\frac{dy}{ds} + (3)\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

so erhält man:

$$dT + Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

folglich:

$$T = C - \int(Xdx + Ydy + Zdz), \qquad (a)$$

weil:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

also:

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0,$$

und:

$$\cos\alpha\,\frac{dx}{ds} + \cos\beta\,\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\,\frac{dz}{ds} = 0$$

ist, da die Tangente der Fadencurve und die Normale der Fläche aufeinander senkrecht stehen. —

Bildet man ferner:

$$(1).\ \frac{dy}{ds} - (2).\ \frac{dx}{ds} = 0,$$

so erhält man:

$$T\left(\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2}\right) + X.\,\frac{dy}{ds} - Y.\,\frac{dx}{ds} + R\left(\cos\alpha\,\frac{dy}{ds} - \cos\beta.\,\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} = V,$$

so ist:

$$\cos\alpha = V.\,\frac{du}{dx},\ \cos\beta = V.\,\frac{du}{dy},\ \cos\gamma = V.\,\frac{du}{dz},$$

und wenn man diese Werthe in die letzte Gleichung setzt:

$$T\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right) + X\,\frac{dy}{ds} - Y\,\frac{dx}{ds} + R\,V\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{du}{dy}\cdot\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad (4)$$

Ebenso findet man:

$$T\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right) + Z\,\frac{dx}{ds} - X\,\frac{dz}{ds} + R\,V\left(\frac{du}{dz}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{ds}\right) = 0, \qquad (5)$$

$$T\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right) + Y\,\frac{dz}{ds} - Z\,\frac{dy}{ds} + R\,V\left(\frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{ds} - \frac{du}{dz}\cdot\frac{dy}{ds}\right) = 0. \qquad (6)$$

Bildet man endlich:

$$(5).\,\frac{du}{dx} + (6).\,\frac{du}{dy} + (7).\,\frac{du}{dz} = 0,$$

so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-T.\frac{du}{dz}\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)\\ &-T.\frac{du}{dy}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)\\ &-T.\frac{du}{dx}\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$=\left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dz}\left(Y\frac{dx}{ds}-X\frac{dy}{ds}\right)+\\ &\frac{du}{dy}\left(X\frac{dz}{ds}-Z\frac{dx}{ds}\right)+\\ &\frac{du}{dx}\left(Z\frac{dy}{ds}-Y\frac{dz}{ds}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

Diese Gleichung und die Gleichung $u=f(x,y,z)=0$ bestimmen die Curve von doppelter Krümmung, welche der Faden im Gleichgewichtszustande bildet. —

§. 80. Wenn die auf den Punkt (x,y,z) wirkende Resultante P der Kräfte X, Y, Z in die Normale der Fläche $u=0$ in diesem Punkte (x,y,z) fällt, wie das Gleichgewicht fordert (§. 73.), so daß:

$$X=P.V\frac{du}{dy},\quad Y=P.V\frac{du}{dy},\quad Z=P.V\frac{du}{dz}$$

ist; so reducirt sich die Gleichung (A) auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{du}{dz}\\ &+\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{du}{dz}\\ &+\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{du}{dx}\end{aligned}\right\}=0,\qquad(7)$$

oder:

$$A\frac{du}{dx}+B\frac{du}{dy}+C\frac{du}{dz}=0.\qquad(7)$$

Die Gleichung der Krümmungsebene für den Punkt (x,y,z) ist aber:

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0,$$

und die Gleichungen der Normale in demſelben Punkte ſind:

$$\frac{\frac{du}{dx}}{x'-x} = \frac{\frac{du}{dy}}{y'-y} = \frac{\frac{du}{dz}}{z'-z},$$

wo x', y', z' die veränderlichen Coordinaten bezeichnen. Soll nun die Normale in die Krümmungsebene fallen, ſo hat man die Bedingungsgleichung:

$$A\frac{du}{dx} + B\frac{du}{dy} + C\frac{du}{dz} = 0, \qquad (7)$$

welche die kürzeſte Linie zwiſchen zwei Punkten der Fläche $u = 0$ charakteriſirt. —

§. 81. Um den in dem Punkte (x, y, z) auf die Fläche ausgeübten Druck $— R$ zu erhalten, bilde man:

$$(1)\ \cos\alpha + (2)\ \cos\beta + (3)\ \cos\gamma = 0,$$

ſo erhält man:

$$— R = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma + T\left(\cos\alpha\frac{d^2x}{ds^2} + \cos\beta\frac{d^2y}{ds^2} + \cos\gamma\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{R}$ den Krümmungshalbmeſſer im Punkte (x, y, z) und ſind λ, μ, ν die Winkel, welche derſelbe mit den Coordinatenaxen bildet; ſo iſt:

$$\cos\lambda = \mathfrak{R}.\frac{d^2x}{ds^2},\ \cos\mu = \mathfrak{R}.\frac{d^2y}{ds^2},\ \cos\nu = \mathfrak{R}.\frac{d^2z}{ds^2};$$

folglich:

$$— R\,ds = X\,ds\cos\alpha + Y\,ds\cos\beta + Z\,ds\cos\gamma + T.\frac{ds}{\mathfrak{R}}(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu($$

$$= P\,ds.\cos\vartheta + \frac{T\,ds}{\mathfrak{R}}\cos\Theta,$$

d. h. der Druck auf das Element ds iſt gleich der Summe der Componenten der Kraft und der Spannung nach der Normale, indem ϑ

und Θ resp. den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Kraft und der Spannung mit der Normale bildet. —

§. 82. Wenn $X = Y = Z = 0$, also auch $P = 0$ ist, so ist nach der Gleichung (a): $T = C$, d. h. constant; folglich:

$$- R\,ds = \frac{C\,ds}{\mathfrak{R}} \cos \Theta,$$

d. h. in diesem Falle ist der Druck auf die Fläche der constanten Spannung C und der Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ proportional (§. 73). —

§. 83. Wenn der Faden frei ist oder nicht auf einer Fläche liegt, so ist $R = 0$, die Gleichungen (1), (2), (3) reduciren sich auf:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \qquad (1')$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \qquad (2')$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0, \qquad (3')$$

und die Gleichungen (4), (5), (6) auf:

$$T\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right) + X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} = 0, \qquad (4')$$

$$T\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right) + Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds} = 0, \qquad (5')$$

$$T\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right) + Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds} = 0, \qquad (6')$$

Von diesen letzten drei Gleichungen ist jede eine Folge aus den beiden andern, und wenn man für T seinen Werth aus (a), welcher offenbar derselbe bleibt, substituirt; so drücken irgend zwei dieser Gleichungen die Fadencurve im Gleichgewichtszustande aus. —

§. 84. Wenn blos die Schwerkraft auf den Faden wirkt, so ist $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0 = -g$, wenn die Axe der z vertikal und nach oben gerichtet ist, und:

$$\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

welches die Differenzialgleichung einer in der Ebene der xy liegenden

geraden Linie ist; und folglich liegt die Fadencurve in einer vertikalen Ebene. Wird diese Ebene zu der der xz und der tiefste Punkt des Fadens zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen, so ist nach der Gleichung (α):

$$T = g(z + c),$$

und nach (5′):

$$(z + c)\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right) = \frac{dx}{ds}. \qquad (m)$$

Wegen $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$, also $\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ verwandelt sich die Gleichung (m) in:

$$\frac{\frac{dz}{ds}}{z + c} + \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = 0,$$

oder:

$$z + c = c\,\frac{ds}{dx} = c\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

weil für $z = 0$ offenbar $\frac{dx}{ds} = 1$ ist; folglich:

$$(z + c)^2 - c^2 = c^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

mithin:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{(z + c)^2 - c^2}},$$

und:

$$x + c = c\,\log\,(z + c + \sqrt{(z + c)^2 - c^2}),$$

weil für $z = 0$ auch $x = 0$ ist.

Folglich ist:

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{z + c}{c} + \sqrt{\left(\frac{z + c}{c}\right)^2 - 1},$$

und:

$$e^{-\frac{x}{c}} = \frac{z + c}{c} - \sqrt{\left(\frac{z + c}{c}\right)^2 - 1};$$

also:

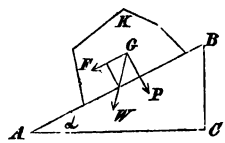
$$z + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Der Faden bildet also eine Kettenlinie (§. 76).

Reibung.

§. 85. Bisher haben wir immer vorausgesetzt: daß die Flächen, mit welchen sich die Körper gegenseitig berühren, vollkommen glatt oder polirt, d. h. so beschaffen sind: daß sie den materiellen Punkten, welche sich auf denselben bewegen, keinen andern Widerstand, als nach der Richtung der Normale entgegensetzen können. — Solche Flächen gibt es jedoch in der Wirklichkeit nicht im absoluten Sinne des Wortes, sondern alle Flächen der Körper leisten den sich auf ihnen bewegenden Körpern oder materiellen Punkten mehr oder weniger Widerstand, und, zwar nach einer der Richtung der Bewegung gerade entgegengesetzten Richtung, welcher daher rührt: daß die kleinen Erhöhungen und Vertiefungen der einander berührenden Flächen in einander eingreifen, weshalb solche Flächen rauh heißen. Der fragliche Widerstand wird Reibung (Friction) genannt — und es handelt sich darum: die Gesetze dieser Reibung zu finden. —

Zu dem Zwecke lege man einen Körper K mit einer seiner Flächen auf eine um ein Gewinde A bewegliche Ebene AB, so wird, wenn man den Neigungswinkel α dieser Ebene gegen den Horizont AC allmälig vergrößert, der Körper erst bei einem gewissen Werthe α' dieses Winkels anfangen von der geneigten Ebene herabzugleiten. — Zerlegt man aber das im Schwerpunkte G angebrachte Gewicht W des Körpers parallel und normal zu der geneigten Ebene AB, so erhält man die beiden Componenten:



$$F = W \sin \alpha',$$
$$P = W \cos \alpha',$$

also:

$$\frac{F}{P} = tang\ \alpha',\ F = tang\ \alpha'.\ P = \mu.\ P.$$

So lange der Winkel $\alpha < \alpha'$ ist, ist die Reibung größer, als die Componente F, welche den Körper abwärts zu bewegen strebt, während die Reibung nach der gerade entgegengesetzten Richtung aufwärts wirkt. Wenn endlich $\alpha = \alpha'$ wird, so wird die Reibung $= F$.

Legt man mehrere Körper K', K'', ... von den Gewichten W', W'', ... aus derselben Substanz als K mit Flächen auf die Ebene AB, welche der von K an Größe und Politur gleich sind; so lehrt die Beobachtung: daß alle diese Körper K', K'' ... bei derselben Größe α' des Neigungswinkels α anfangen die geneigte Ebene herabzugleiten. — Man hat folglich auch:

$$F' = tang\ \alpha.\ P', \quad F'' = tang\ \alpha'.\ P'', \ .....$$
$$= \mu.\ P' \qquad\qquad = \mu.\ P''$$

also:

$$F : F' : F'' : \ldots = P : P' : P'' : \ldots .$$

d. h. die Reibung verhält sich bei **gleichen** Berührungsflächen, wie der Druck.

Legt man ferner denselben Körper K successive mit seinen verschiedenen Flächen von ungleicher Größe, aber gleicher Politur auf die Ebene AB, so lehrt die Beobachtung: daß die Bewegung stets bei derselben Größe α' des Neigungswinkels $\alpha = BAC$ beginnt. — Die Reibung ist also von der **Größe** der Berührungsfläche unabhängig, wenn der Druck **derselbe** bleibt. — Wenn nämlich die Berührungsfläche n mal größer, oder kleiner wird, so wird der Druck in jedem Punkte derselben n mal kleiner, oder größer, indem sich der Gesammtdruck P gleichförmig über die Berührungsfläche vertheilt. — Diese beiden Gesetze der Reibung setzen jedoch voraus: daß der Druck P nicht so groß wird, daß die einander berührenden Flächen angegriffen oder abgenutzt werden. Sie gelten aber sowohl für die statische, wie für die dynamische Reibung, d. h. sowohl für den Fall, wo der Körper eben aus der Ruhe in Bewegung übergeht, als für den, wo er sich schon in Bewegung befindet; nur ist im zweiten Falle unter übrigens gleichen Umständen

die Reibung kleiner, als im ersten; d. h. es ist eine größere Kraft erforderlich, um den Körper aus der Ruhe in Bewegung zu versetzen, als die bereits stattfindende Bewegung zu erhalten; jedoch wird dieser Unterschied durch die geringste Erschütterung einer der einander berührenden Flächen wieder aufgehoben. — Die statische Reibung erreicht ihren größten Werth erst, nachdem die Flächen einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind. — Die dynamische Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers. —

Die rollende Reibung, welche stattfindet, wenn ein Cylinder auf einer Ebene ohne Gleiten fortrollt, ist weit geringer, als die vorhin besprochene — und kann gewöhnlich gegen diese unberücksichtigt bleiben — verhält sich übrigens direkt wie der Druck und umgekehrt wie der Durchmesser des Cylinders. —

Die specielle Angabe des Zahlenwerthes von μ für verschiedene Substanzen und Umstände gehört in die technische Mechanik oder Maschinenlehre. —

Zweite Abtheilung.

Aufgaben.

Einleitung.

Bei der Auflösung statischer Aufgaben muß man zunächst untersuchen, was für Kräfte in Betracht kommen, dann für unbekannte Druckkräfte, Widerstände oder Reactionen unbekannte Kräfte substituiren, und unbekannte Längen, Winkel, u. s. w. durch unbekannte Größen bezeichnen. Hierauf muß man die Gleichungen des Gleichgewichtes aufzustellen suchen, deren Anzahl nach der Beschaffenheit der Aufgaben verschieden ist — so wie auch die Gleichungen zwischen den geometrischen Größen, d. h. Längen, Winkeln, u. s. w., und zuletzt muß man untersuchen, wie viele unbekannte Größen in diesen Gleichungen vorkommen. — Wenn die Anzahl der Unbekannten größer ist, als die der Gleichungen, so ist die Aufgabe unbestimmt, oder es sind noch nicht alle Bedingungsgleichungen gebildet, so daß man die fehlenden noch suchen muß. — Bleibt die Anzahl der Gleichungen zuletzt doch kleiner, als die der Unbekannten, so kann das Gleichgewicht unter mehrern Umständen stattfinden, und heißt alsdann unbestimmt, woraus jedoch noch nicht folgt: das alle Unbekannten unbestimmt sind. — Wenn die Anzahl der Gleichungen der der Unbekannten

gleich ist, so kann das Gleichgewicht nur auf eine Weise stattfinden. — Wenn endlich die Anzahl der Gleichungen größer ist, als die der Unbekannten, so findet das Gleichgewicht nur dann statt, wenn die bekannten Größen auch den Bedingungsgleichungen genügen, welche man erhält, wenn die Unbekannten aus den Gleichungen eliminirt werden. —

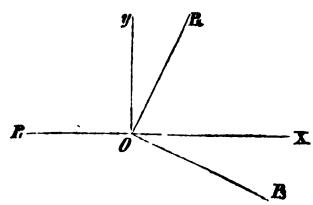
Die Auflösung wird oft durch eine passende Wahl der Mittelpunkte der Momente, so wie der Richtungen, nach welchen man die Kräfte zerlegen muß, u. s. w., sehr vereinfacht und erleichtert. Auch muß man wohl beachten, ob es sich um die Bestimmung einer Gleichgewichtslage, oder um die Größe und Richtung eines unbekannten Druckes, u. s. w. handelt, weil man oft eine, oder die andere Gleichung ganz bei Seite setzen kann, da sie zu dem Gesuchten in gar keiner Beziehung steht. —

Aufgabe 1. Drei Kräfte P_1, P_2, P_3, deren Richtungen in derselben Ebene liegen und Winkel von 105^0, 120^0, 135^0 mit einander bilden, halten den materiellen Punkt, worauf sie wirken, im Gleichgewichte; man soll das Verhältniß dieser Kräfte finden.

Auflösung. Nach §. 16. ist:

$$\begin{aligned} P_1 : P_2 : P_3 &= \sin 105^0 : \sin 120^0 : \sin 135^0 \\ &= \cos 15^0 : \cos 30^0 : \cos 45^0 \\ &= \cos(45^0 - 30^0) : \cos 30^0 : \cos 45^0 \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Auf denselben Punkt O wirken drei gleiche Kräfte P_1, P_2, P_3, deren Richtungen in derselben Ebene liegen und Winkel von 105^0, 120^0, 135^0 mit einander bilden; man soll die Größe und Richtung der Resultante bestimmen.



Auflösung. Wenn R die gesuchte Resultante und Θ den Winkel bezeichnet, welchen ihre Richtung mit der Axe der x bildet; so ist nach §. 18:

$$R\cos\Theta = -P_1 + P_2\cos(P_2\,Ox) + P_3\cos(P_3\,Ox)$$
$$= -P_1 + P_1\cos 60^0 + P_1\cos 45^0$$
$$= P_1.\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$
$$R\sin\Theta = P_2\sin 60^0 - P_3\sin 45^0$$
$$= P_1\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2};$$

folglich:

$$tang\,\Theta = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 0{,}7673269,$$

und:

$$\Theta = 37^0\,30'.$$

Ferner ist:

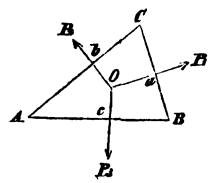
$$R^2 = (R\cos\Theta)^2 + (R\sin\Theta)^2$$
$$= P_1^2\,(2 - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$$
$$= P_1^2.\,0{,}0681484,$$

oder:

$$R = 0{,}2610525\;P_1\quad,$$

wodurch die Größe und Richtung der Resultante R bestimmt ist. —

Aufgabe 3. Drei Kräfte P_1, P_2, P_3 sind den Seiten BC, AC, AB eines Dreieckes ABC proportional, und in deren Mitten a, b, c nach senkrechten, in der Ebene des Dreickes liegenden Richtungen angebracht; man soll beweisen: daß sie einander das Gleichgewicht halten. —



Auflösung. Die Richtungen der Kräfte müssen sich nach einem bekannten geometrischen Satze in demselben Punkte O durchschneiden, und wenn man ihre Angriffspunkte in diesen Punkt O verlegt; so hat man nach §. 15:

$$P_1 : P_2 : P_3 = BC : AC : AB$$
$$= \sin A : \sin B : \sin C$$
$$= \sin(P_2, P_3) : \sin(P_1, P_3) : \sin(P_1, P_2).$$

Folglich findet nach §. 16. das Gleichgewicht statt. —

Aufgabe 4. Dasselbe für ein Vieleck zu beweisen. —

Aufgabe 5. Zwei gleiche Kräfte wirken nach den gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogrammes, aber nach entgegengesetztem

Sinne, und eine dritte Kraft nach der Diagonale desſelben; man ſoll die Kraft beſtimmen, welche jenen das Gleichgewicht hält. —

Aufgabe 6. Unter welchem Winkel müſſen zwei gleiche Kräfte wirken, wenn ihre Reſultante jeder, oder dem *n*ten Theile derſelben gleich ſein ſoll? —

Aufgabe 7. Von zwei Kräften wirkt die eine unter einem Winkel von 30° und die andere ſenkrecht auf eine Ebene, und bringen dieſelbe Wirkung hervor; man ſoll das Verhältniß dieſer Kräfte finden. —

Aufgabe 8. Wenn der Winkel, welchen zwei Kräfte P, Q mit einander bilden, $= 0$ wird, ſo iſt ihre Reſultante $= P + Q$, und wenn derſelbe $= 180°$ wird, ſo iſt ſie $= P - Q$ (§. 11). Wie groß muß dieſer Winkel ſein, damit die Reſultante eine mittlere Proportionale zwiſchen ihrem größten und kleinſten Werthe $P + Q$ und $P - Q$ wird?

Aufgabe 9. Eine gegebene Kraft in zwei andere zu zerlegen, 1) welche einander gleich ſind, 2) deren Summe, oder Differenz einer gegebenen Größe gleich iſt, 3) welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden, 4) welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden und eine gegebene Summe, oder Differenz haben. —

Aufgabe 10. Wenn die Differenz zwiſchen einer von zwei gleichen auf einander ſenkrechten Kräften und ihre Reſultante gegeben iſt, die Kräfte ſelbſt zu finden. —

Aufgabe 11. Wenn zwei Sehnen AB, AC eines Kreiſes zwei Kräfte darſtellen, und die eine AB gegeben iſt, die andere AC ſo zu beſtimmen, daß ihre Reſultante ein Maximum wird. —

Aufgabe 12. Wenn drei Kräfte P, Q, R einen materiellen Punkt im Gleichgewichte halten und die Größe und Richtung von P, ſowie die Größe von R und die Richtung von Q gegeben iſt: die Richtung von R und die Größe von Q zu finden. —

Aufgabe 13. Wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Reſultante dreier rechtwinkliger Kräfte mit jeder derſelben bildet, zu beweiſen: daß:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

iſt. —

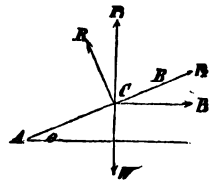
Aufgabe 14. Wenn auf einen in der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreieckes befindlichen materiellen Punkt Kräfte wirken, welche nach Größe und Richtung durch die geraden

Linien dargestellt werden, die aus der fraglichen Winkelspitze nach gleichweit von einander abstehenden Punkten der Hypotenuse gezogen sind, die Größe und Richtung ihrer Resultante zu finden. —

Aufgabe 15. In einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke *ABC* wirken drei gleiche Kräfte nach den Richtungen *AB*, *BC*, *CA*; man soll den Angriffspunkt, so wie die Größe und Richtung der Kraft finden, welche jenen das Gleichgewicht hält. —

Aufgabe 16. An den beiden gegenüberliegenden Winkelspitzen *A*, *C* eines Parallelogrammes *ABCD* wirken zwei parallele Kräfte in demselben Sinne und an dem Punkte *B* wirkt nach der Diagonale *BD* eine dritte Kraft; man soll die Größe und den Angriffspunkt einer vierten Kraft finden, welche das Parallelogramm im Gleichgewichte hält. —

Aufgabe 17. Ein Gewicht *W* wird durch drei Kräfte P_1, P_2, P_3, jede $= \frac{1}{3} W$, auf einer polirten geneigten Ebene *AB* im Gleichgewichte erhalten, indem die eine Kraft P_1 vertikal aufwärts, die andere P_2 parallel zu der Ebene *AB* und die dritte P_3 nach horizontaler Richtung wirkt. Man soll die Neigung Θ der Ebene *AB* gegen den Horizont bestimmen.



Auflösung. Außer den drei Kräften P_1, P_2, P_3 wirken auf den Körper *C* von dem Gewichte *W* noch dieses Gewicht *W* vertikal abwärts und der Widerstand *R* der Ebene *AB* nach einer auf *AB* senkrechten Richtung, weil die Ebene *AB* als vollkommen glatt vorausgesetzt wird. Da alle diese 5 Kräfte in derselben Ebene liegen, so hat man nach §. 18., wenn man sie nach den Richtungen *CB*, *CR* zerlegt, als Bedingungen des Gleichgewichtes von *C*:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin\Theta + P_2 + P_3 \cos\Theta - W \sin\Theta = 0, \\ R + P_1 \cos\Theta - P_3 \sin\Theta - W \cos\Theta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt wegen $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3} W$:

$$1 + \cos\Theta = 2 \sin\Theta,$$

oder:

$$2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} = 4 \sin\frac{\Theta}{2} \cos\frac{\Theta}{2},$$

folglich:

$$tang\ \frac{\Theta}{2} = \tfrac{1}{2},$$

also:

$$\Theta = 2\ arctang\ \tfrac{1}{2} = 53^{\circ}7'\,48''.$$

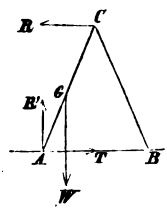
Es mag bemerkt werden: daß wir der zweiten Bedingungsgleichung (α) gar nicht bedurft haben, wodurch sich das am Ende der Einleitung Gesagte bestätigt — und stattfindet, wenn man die Kräfte nach einer Richtung zerlegt, welche auf der Richtung unbekannter und nicht gesuchter Kräfte senkrecht ist. — Uebrigens gibt die zweite der Gleichungen (a) den Widerstand R der geneigten Ebene, sobald Θ gefunden ist. —

Hätten wir die Kräfte nach der horizontalen und vertikalen Richtung zerlegt, so hätten wir statt der Gleichungen (α) die beiden folgenden erhalten:

$$R\ sin\ \Theta - P_2\ cos\ \Theta - P_3 = 0,$$
$$R\ cos\ \Theta + P_1 + P_2\ sin\ \Theta - W = 0,$$

wo die Unbekannte R in beiden vorkommt, und also erst eliminirt werden müßte, was bei der ersten Zerlegung der Kräfte vermieden wird. —

Aufgabe 18. Zwei gleiche, gleichförmig dicke und dichte Balken AC, BC stehen auf einer glatten horizontalen Ebene AB, indem ihre untern Enden durch ein Seil verbunden, die obern gegen einander gelehnt und die Balken in einer Vertikalebene sind. Man soll die Spannung des Seiles AB bestimmen. —



Auflösung. Es sei $AC = BC = a$, $AB = b$, $\angle\ CAB = \Theta$, G der Schwerpunkt von AC, so ist der Balken AC unter der Wirkung des Widerstandes R von BC, der Spannung T des Seiles AB, des Widerstandes R' der horizontalen Ebene und des Gewichtes W im Gleichgewichte. — Um R' zu vermeiden, zerlegen wir die Kräfte nach der horizontalen Richtung und nehmen die Momente in Beziehung auf den Punkt A, so ist:

$$R - T = 0,\ \text{also}\ R = T,$$

und:

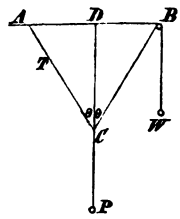
$$R.\ AC\ sin\ \Theta - W.\ AG\ cos\ \Theta;$$

folglich:

$$T = R = W. \frac{AG}{AC} \cot g\, \Theta$$

$$= \frac{W}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Aufgabe 19. An dem festen Punkte A ist ein dünner Faden befestigt und an dem Knoten C desselben ein Gewicht P aufgehangen, indem an dem andern Ende des Fadens, nachdem derselbe durch einen glatten, mit A in derselben Horizontale liegenden Ring B gezogen, ein Gewicht W wirkt. Man soll nun das Verhältniß $\frac{P}{W}$ so bestimmen: daß im Gleichgewichtszustande die Vertikale in C die Entfernung AB in D halbirt. —



Auflösung. Nach der Voraussetzung ist offenbar $\angle ACD = \angle BCD = \Theta$. Es sei $CA = b$, $AB = a$, T die Spannung von AC und W ist die von BC, weil der Ring B vollkommen polirt ist. Die vertikalen Componenten der auf den Knoten C wirkenden Kräfte geben:

$$(T + W) \cos \Theta = P,$$

und die horizontalen:

$$T \sin \Theta = W \sin \Theta, \text{ also } T = W,$$

folglich:

$$2\, W \cos \Theta = P, \text{ also } \cos \Theta = \frac{P}{2W}. \qquad (\alpha)$$

Ferner ist offenbar:

$$b \sin \Theta = \frac{a}{2}, \text{ also } \sin \Theta = \frac{a}{2b}. \qquad (\beta)$$

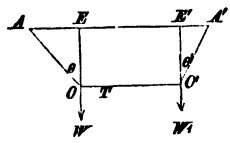
Addirt man die Quadrate der Gleichungen (α), (β), so ergibt sich:

$$1 = \frac{P^2}{4W^2} + \frac{a^2}{4b^2}, \text{ folglich } \frac{P^2}{4W^2} = \frac{4b^2 - a^2}{4b^2},$$

und endlich:

$$\frac{P}{W} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{b}.$$

Aufgabe 20. A, A' sind zwei in derselben Horizontale liegende feste Punkte, welche durch einen Faden $AOO'A'$ von der Länge c verbunden sind, an dem in zwei Punkten O, O' zwei Gewichte W, W' wirken. Man soll die Lage der Punkte O, O' so bestimmen: daß $OE = O'E' =$ einer gegebenen Größe a wird.



Auflösung. Es sei $AA' = b$, $\angle AOE = \Theta$, $\angle A'O'E' = \Theta'$ und T die Spannung von OO'; so hat man für das Gleichgewicht von O:

$$\frac{T}{W} = \frac{\sin(\pi - \Theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \Theta)} = \operatorname{tang} \Theta,$$

und für das von O':

$$\frac{W'}{T} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \Theta')}{\sin(\pi - \Theta')} = \operatorname{cotg} \Theta'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$W \operatorname{tang} \Theta = W' \operatorname{tang} \Theta'. \qquad (\mu)$$

Ferner ist:

$$EE' = AA' - AE - A'E'$$
$$= b - a(\operatorname{tang} \Theta + \operatorname{tang} \Theta')$$

und:

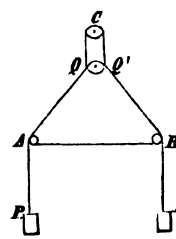
$$EE' = OO' = c - AO - A'O'$$
$$= c - a(\sec \Theta + \sec \Theta'),$$

folglich:

$$a(\sec \Theta + \sec \Theta' - \operatorname{tang} \Theta - \operatorname{tang} \Theta') = c - b. \qquad (\nu)$$

Aus den Gleichungen (μ), (ν) ergeben sich die Werthe von Θ, Θ' und da $OE = O'E' = a$ gegeben ist; so findet man auch leicht AO und $A'O'$.

Aufgabe 21. Ein Faden $PAQCQ'BP$, an dessen beiden Enden zwei gleiche Gewichte P hängen, geht über eine feste Rolle C und über zwei gegen C symmetrisch gelegene feste und polirte Bolzen A, B. Ueber C wird ein schwerer Ring QQ' auf den Faden gelegt, dessen innerer Durchmesser so groß ist: daß die obern Fadenstücke parallel sind. Man soll die Gleichgewichtslage des Ringes bestimmen. —



Auflösung. Es sei W das Gewicht des Ringes und Θ die Neigung von AQ gegen die Horizontale AB. Da der Ring und die Bolzen polirt sind, so ist die Spannung des Fadens überall $= P$, und wenn sich das Gleichgewicht hergestellt hat, so kann man annehmen: daß Ring und Faden an ihren Berührungspunkten fest verbunden sind. Alsdann wird der Ring durch 5 Kräfte im Gleichgewichte erhalten, nämlich durch die vertikalen Spannungen P, P längs QC, $Q'C$, durch die schiefen Spannungen P, P nach QA, $Q'B$ und durch sein eigenes Gewicht W, welches vertikal abwärts wirkt. Zerlegt man also diese Kräfte nach der vertikalen Richtung, so hat man für das Gleichgewicht:

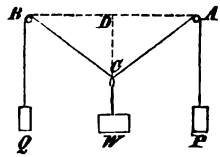
$$2\,P - 2\,P\,\sin\Theta - W = 0,$$

folglich:

$$\sin\Theta = 1 - \frac{W}{2\,P},$$

wodurch die Lage von Q fixirt ist. —

Aufgabe 22. Zwei Gewichte P, Q sind durch einen Faden verbunden, welcher über zwei in derselben Horizontale liegende glatte Bolzen A, B geht, und woran mittelst eines Ringes C ein Gewicht W aufgehangen ist. Man soll die Gleichgewichtslage dieses Ringes, so wie die Natur des Gleichgewichtes bestimmen, d. h. ob dasselbe stabil ist, oder nicht. —



Auflösung. Da die Bolzen A, B und der Ring C vollkommen polirt sind, so ist die Spannung des Fadens überall dieselbe; folglich $P = Q$. Der Punkt C wird also durch die beiden nach CA und CB wirkenden Spannungen P und durch das Gewicht W im Gleichgewichte gehalten, und folglich ist nach §. 16:

$$\frac{P}{\sin BCW} = \frac{P}{\sin ACW} = \frac{W}{\sin ACB},$$

also:
$$\angle BCW = \angle ACW,$$

und:
$$\frac{W}{P} = \frac{\sin ACB}{\sin ACW} = \frac{\sin\Theta}{\sin\frac{\Theta}{2}} = 2\,\cos\frac{\Theta}{2},$$

wodurch die Gleichgewichtslage des Ringes C bestimmt ist.

Um ferner zu entscheiden, ob das Gleichgewicht stabil ist, oder nicht, sei $AB = 2a$, $CW = c$, $2b =$ der Länge des Fadens und $\bar{z}$ die Tiefe des Schwerpunktes von P, Q, W unter AB; so ist:

$$(P + Q + W)\,\bar{z} = P.AP + Q.BQ + W.DW$$

$$= 2P\left(b - \frac{a}{\sin\frac{\Theta}{2}}\right) + W\left(c + a.\cot g\,\frac{\Theta}{2}\right),$$

folglich:

$$(2P + W)\,\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = P\,a\,\operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2}\cot g\,\frac{\Theta}{2} - \tfrac{1}{2}\,W\,a\,\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}$$

$$= \frac{a}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}\left(2P\cos\frac{\Theta}{2} - W\right) = 0 \text{ (§. 67.)},$$

und:

$$(2P + W)\,\frac{d^2\bar{z}}{d\Theta^2} = -\frac{a}{c}\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}\cdot P\sin\frac{\Theta}{2},$$

$$\text{wegen } W = 2P\cos\frac{\Theta}{2}.$$

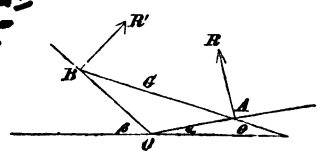
Es ist also $\bar{z}$ ein Maximum; folglich das Gleichgewicht stabil (§. 68).

Auch ist zu bemerken: daß die Gleichung $\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = 0$ schon die Gleichgewichtsbedingung:

$$W = 2P\cos\frac{\Theta}{2}$$

von selbst gibt. —

Aufgabe 23. Eine schwere gerade Stange AB ruht mit ihren Enden auf zwei glatten geneigten Ebenen OA, OB, so daß die Vertikalebene durch die Axe der Stange auf den geneigten Ebenen senkrecht ist. Man soll die Gleichgewichtslage der Stange finden. —



Auflösung. Es sei $AG = a$, $BG = b$, wo G der Schwerpunkt der Stange ist; so ist dieselbe unter der Wirkung der Widerstände R, R' und ihres Gewichtes im

Gleichgewichte. Um dieſes Gewicht in den Gleichungen zu vermeiden, zerlegen wir nach der horizontalen Richtung und nehmen die Momente in Beziehung auf den Punkt G, ſo iſt:

$$R \sin \alpha - R' \sin \beta = 0, \qquad (m)$$

und:

$$R.\ GA \sin GAR - R'.\ GB \sin GBR' = 0$$

oder:

$$R\, a \cos OAB - R' b \cos OBA = 0,$$

d. h.:

$$R\, a \cos (\alpha + \Theta) - R' b \cos (\beta - \Theta) = 0; \qquad (n)$$

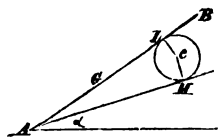
alſo:

$$\frac{(n)}{(m)} \ldots\ \frac{a \cos (\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} = \frac{b \cos (\beta - \Theta)}{\sin \beta},$$

und:

$$tang\, \Theta = \frac{a\, cotg\, \alpha - b\, cotg\, \beta}{a + b}.$$

Aufgabe 24. Eine glatte Kugel LM von dem Halbmeſſer r (= 6 Zoll) und dem Gewichte w (= $3\frac{1}{2}$ Pfd.) liegt auf einer glatten Ebene AM, deren Neigung gegen den Horizont = α (= 60°) iſt, und wird durch einen um A beweglichen glatten Balken AB von dem Gewichte W (= 100 Pfund) und der Länge a (= 6 Fuß) im Gleichgewichte erhalten; man ſoll die Gleichgewichtslage der Kugel und des Balkens beſtimmen. —



Auflöſung. Es ſei R die Reaction in L zwiſchen der Kugel und dem Balken, und R' die Reaction in M zwiſchen der geneigten Ebene und der Kugel, welche reſp. auf AB und AM ſenkrecht ſtehen, und $\angle BAM = 2\,\Theta$. Der um A bewegliche Balken AB, deſſen Schwerpunkt G ſei, wird durch R und W im Gleichgewichte gehalten, und man hat für denſelben in Beziehung auf den Punkt A die Momentengleichung:

$$R.\ AL = W.\ \frac{a}{2} \cos (\alpha + 2\,\Theta),$$

d. h.:

$$R.\ r\ cotg\, \Theta = W.\ \frac{a}{2} \cos (\alpha + 2\,\Theta).$$

Die Kugel wird durch die nach LC, MC wirkenden Widerstände R, R' und ihr Gewicht w im Gleichgewichte gehalten — und um R' in den Gleichungen zu vermeiden, wollen wir die Kräfte parallel zu der geneigten Ebene zerlegen; so ist:

$$R \sin 2\Theta - w \sin \alpha = 0.$$

Wenn man R zwischen den beiden letzten Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$2 w r \sin\alpha \operatorname{cotg}\Theta - W a \sin 2\Theta \cos(\alpha + 2\Theta),$$

also:

$$\sin^2\Theta \cos(\alpha + 2\Theta) = \frac{wr}{Wa} \sin\alpha,$$

und wenn man in diese Gleichung für W, w, a, r, α ihre Werthe setzt; so ergibt sich:

$$\Theta = 4^0\ 45'\ 30''$$

und:

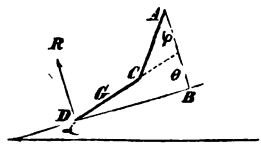
$$\alpha + 2\Theta = 69^0\ 49',$$

wodurch die Lage des Balkens bestimmt ist. —

Die der Kugel ergibt sich aus der Relation:

$$AM = r \cos\Theta = 5{,}822314 \text{ Fuß}.$$

Aufgabe 25. Ein gleichförmig schwerer Balken CD ruht mit seinem einen Ende D auf einer polirten geneigten Ebene DB, während das andere Ende C mittelst eines Fadens CA von gegebener Länge $= b$ an einem festen Punkte A aufgehangen ist; man soll die Gleichgewichtslage desselben finden. —



Auflösung. Es sei AB senkrecht auf DB, φ der Neigungswinkel von AC und Θ der von CD gegen AB, G der Schwerpunkt des Balkens, α die Neigung der Ebene DB gegen den Horizont, $CG = a = DG$, $AC = b$, $AB = c$, T die Spannung des Fadens AC und R der Widerstand der Ebene DB in D; so hat man, wenn man AC und CD auf AB projicirt:

$$c = b \cos\varphi + 2 a \cos\Theta. \qquad (1)$$

Um das Gewicht des Balkens in den Gleichungen zu vermei-

den, zerlege man die Kräfte nach der horizontalen Richtung und nehme die Momente in Beziehung auf G; so hat man:

$$R \sin \alpha - T \sin (\varphi - \alpha) = 0,$$

und:

$$R\, a \sin \Theta - T\, a \sin (\Theta - \varphi) = 0;$$

folglich:

$$\sin \Theta \sin (\varphi - \alpha) = \sin \alpha \sin (\Theta - \varphi)$$

und:

$$2 \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{cotg} \Theta + \operatorname{cotg} \alpha; \qquad (2)$$

aber aus (1) folgt:

$$b \cos \varphi = c - 2\, a \cos \Theta,$$

mithin ist:

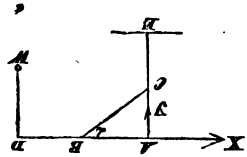
$$2\, b \sin \varphi = (c - 2\, a \cos \Theta)(\operatorname{cotg} \Theta + \operatorname{cotg} \alpha),$$

also:

$$4\, b^2 = (2\, b \cos \varphi)^2 + (2\, b \sin \varphi)^2$$
$$= (c - 2\, a \cos \varphi)^2 \; [4 + (\operatorname{cotg} \Theta + \operatorname{cotg} \alpha)^2].$$

Aus dieser Gleichung muß Θ abgeleitet werden, und alsdann gibt (2) den Werth von φ. —

Aufgabe 26. Drei Balken AD, AE, BC sind in A, B, C durch Gewinde verbunden; AE ist vertikal und in E befestigt, und AD ist horizontal, und endlich ist in D ein Gewicht W aufgehangen. Man soll den Druck auf die Gewinde finden. —



Auflösung. Wegen der Gewinde in C und B kann der Balken CB nur nach der Richtung seiner Länge eine Wirkung ausüben, und es sei T die Druckkraft, welche derselbe in der Richtung CB auf B und in der Richtung BC auf C ausübt. Den auf A ausgeübten Druck wollen wir nach BA, AC in die Componenten X, Y zerlegen, und es sei $\angle ABC = \alpha$, $BC = a$, $BD = b$. Alsdann wird der Balken AD von den Kräften X, Y, T und W im Gleichgewichte gehalten, und wenn man dieselben nach der vertikalen und horizontalen Richtung zerlegt, und die Momente in Beziehung auf den Punkt B nimmt; so ergibt sich:

$$W - T \sin \alpha + Y = 0,$$
$$T \cos \alpha - X = 0,$$

und:

$$W b - Y a \cos \alpha = 0.$$

Aus diesen 3 Gleichungen ergibt sich:

$$Y = \frac{W b}{a \cos \alpha},$$

$$T = \frac{a \cos \alpha + b}{a \cos \alpha \sin \alpha} \cdot W,$$

$$X = \frac{a \cos \alpha + b}{a \sin \alpha} \cdot W,$$

wodurch die Druckkräfte auf A, B und C offenbar der Größe und Richtung nach bestimmt sind. —

Wenn die Gewinde bei A, B, C fest würden, so erfolgte die Wirkung von BC nicht nothwendig nach seiner Richtung, und wäre unbestimmt — und es könnte der Balken BC sogar hinweggenommen werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört würde. —

Aufgabe 27. Zwei schwere Punkte P, Q sind durch eine unbiegsame gerade Linie verbunden; P liegt auf einer glatten geneigten Ebene, und man soll die Gleichung der Curve finden, auf welcher Q liegen muß, wenn in allen Lagen das Gleichgewicht stattfinden soll. —

Auflösung. Die Gleichung der geneigten Ebene sei:

$$y' = mx', \qquad (1)$$

indem die Axe der x horizontal und die der y vertikal ist. Es seien x', y' die Coordinaten von P und x, y die von Q, b bezeichne die Höhe des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von P und Q über der Axe der x, welche nach §. 68 constant ist, und a die Länge der geraden Verbindungslinie von P, Q; so ist:

$$(P + Q)\, b = Py' + Qy, \qquad (2)$$

$$a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2. \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$y' = (1 + \frac{Q}{P})\, b - \frac{Q}{P}\, y,$$

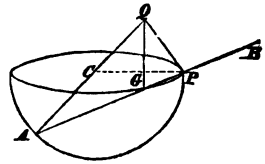
$$x' = (1 + \frac{Q}{P})\, \frac{b}{m} - \frac{Q}{Pm}\, y,$$

und wenn man diese Werthe für x', y' in (3) setzt; so ergibt sich:

$$x^2 + \frac{2Q}{mP}xy + \left[\left(1+\frac{Q}{P}\right)^2 + \frac{Q^2}{m^2P^2}\right]y^2 - \frac{2}{m}\left(1+\frac{Q}{P}\right)bx$$
$$- 2\left(1+\frac{Q}{P}\right)\left[1+\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\frac{Q}{P}\right]by$$
$$+ \left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{Q}{P}\right)^2 - a^2 = 0$$

als die Gleichung der gesuchten Curve, welche folglich eine Ellipse ist.—

Aufgabe 28. Eine Stange AB liegt in einer polirten hohlen Halbkugel, indem sie sich in P und A gegen dieselbe stützt; man soll die Gleichgewichtslage der Stange finden. —



Auflösung. Es sei C der Mittelpunkt der Kugel und G der Schwerpunkt der Stange, so wird letztere im Gleichgewicht gehalten: 1) durch den Widerstand in P nach der auf AB normalen Richtung PQ, 2) durch den Widerstand in A nach der durch C gehenden Richtung AQ und 3) durch ihr eigenes Gewicht, welches in G vertikal abwärts wirkt. Diese drei Kräfte müssen, da sie nicht parallel sind und die Stange AB doch im Gleichgewichte halten, durch denselben Punkt gehen (§. 54); folglich ist QG vertikal und:

$$\frac{AQ}{AG} = \frac{\sin AGQ}{\sin AQG}.$$

Es sei $AG = a$, $CP = r$, so ist $AQ = 2r$, weil $APQ = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ ist; ferner sei die Neigung der Stange AB gegen den Horizont, d. h. $\angle CPA = \Theta$, so ist:

$$AGQ = \pi - PGQ = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \frac{\pi}{2} + \Theta$$

und:

$$AQG = PGQ - PAC = \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) - \Theta = \frac{\pi}{2} - 2\Theta;$$

folglich:

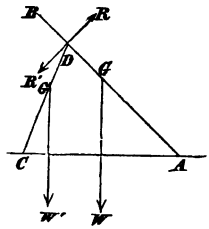
$$\frac{2r}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\Theta\right)} = \frac{\cos\Theta}{\cos 2\Theta} = \frac{\cos\Theta}{2\cos^2\Theta - 1},$$

also endlich:

$$\cos^2\Theta - \frac{a}{4r}\cos\Theta = \tfrac{1}{2},$$

wodurch Θ bestimmt wird. —

Aufgabe 29. Ein glatter schwerer Balken AB, welcher sich um ein Gewinde in A in einer vertikalen Ebene drehen kann, stützt sich auf einen andern CD, welcher sich in derselben Ebene um C drehen kann. Man soll die Gleichgewichtslage finden. —



Auflösung. Es seien G, G' die Schwerpunkte der beiden Balken, woran ihre Gewichte W, W' angebracht sein mögen, und $R = R'$ der gegenseitige Widerstand der beiden Balken AB, CD in D. Ferner sei $AG = a$, $CD = b$, $AC = c$, $\angle BAC = \Theta$, $\angle ACD = \varphi$; so ist für das Gleichgewicht von AB, wenn man die Momente von R und W in Beziehung auf den Punkt A nimmt:

$$W.\, a.\, \cos\Theta = R.\, AD = R.\, b.\, \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}. \qquad (1)$$

Ebenso hat man, wenn man die Momente von R', W' in Beziehung auf den Punkt C nimmt, für das Gleichgewicht des Balkens CD:

$$W'.\, \frac{b}{2}\cos\varphi = R'\, b \sin CDR'$$
$$= R\, b \cos CDA, \text{ wegen } R = R'$$
$$= -\, R\, b \cos(\Theta + \varphi),$$

und wenn R mittelst (1) eliminirt wird:

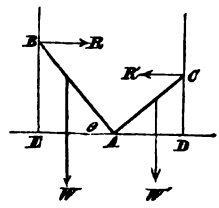
$$2\, W\, a \cos\Theta \sin\Theta \cos(\Theta + \varphi) + W'\, b \cos\varphi \sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Ferner ist:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(\Theta + \varphi)}{\sin\Theta}, \qquad (3)$$

und folglich sind die Werthe von Θ, φ durch (2) und (3) bestimmt.

Aufgabe 30. Zwei Balken AB, AC stützen sich auf der horizontalen Ebene ED in A gegen einander und in B, C gegen zwei vertikale Ebenen EB, DC; es sind die Längen a, b, so wie die Gewichte W, W', der beiden Balken gegeben, und man soll die gegenseitige Entfernung ED der beiden vertikalen Ebenen bestimmen, wenn der Winkel BAC ein rechter ist. —



Auflösung. Der Balken AB wird durch R, W und die in A auf ihn wirkenden Widerstände im Gleichgewichte gehalten, und um diese in den Gleichungen zu vermeiden, wollen wir die Momente von R, W in Beziehung auf den Punkt A nehmen; so ist, wenn $\angle BAE = \Theta$ gesetzt wird:

$$W.\frac{a}{2}\cos\Theta - R\,a\sin\Theta = 0. \qquad (1)$$

Ebenso erhält man für den Balken AC:

$$W'\frac{b}{2}\sin\Theta - R'\,b\cos\Theta = 0. \qquad (2)$$

Um noch eine Gleichung zwischen R und R', aber ohne die in A wirkenden Kräfte zu erhalten, wollen wir annehmen: daß die beiden Balken in A fest mit einander verbunden sind, wodurch weder das Gleichgewicht gestört, noch R oder R' geändert wird. — Alsdann ist BAC ein fester Körper, welcher sich unter der Wirkung der horizontalen Kräfte R, R', seines vertikal abwärts wirkenden Gewichtes $W + W'$ und des vertikalen Widerstandes der Ebene EQ in A im Gleichgewichte befindet. Nimmt man folglich die horizontalen Componenten dieser Kräfte, so hat man:

$$R - R' = 0. \qquad (3)$$

Eliminirt man nun R und R' zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3), so erhält man:

$$W\cos^2\Theta = W'\sin^2\Theta,$$

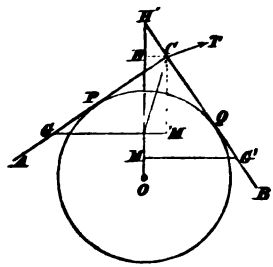
folglich:

$$\operatorname{tang}\Theta = \sqrt{\frac{W}{W'}},$$

und:

$$ED = a\cos\Theta + b\sin\Theta$$
$$= \frac{a + b\,tang\,\Theta}{\sqrt{1 + tang^2\Theta}}$$
$$= \frac{a\sqrt{W'} + b\sqrt{W}}{\sqrt{W' + W}}.$$

Aufgabe 31. Zwei gegebene Balken AC, BC, welche in C durch ein Gewinde verbunden ſind, werden quer über einen horizontalen polirten Cylinder von einem gegebenen Halbmeſſer r gelegt; man ſoll ihre Gleichgewichtslage, ſo wie den Druck auf ihr Gewinde beſtimmen. —



Auflöſung. Es ſeien G, G' die Schwerpunkte von AC, CB; W, W' ihre Gewichte und P, Q ihre Berührungspunkte mit dem Cylinder, deſſen Querſchnittsmittelpunkt O iſt, $\angle COH = \Theta$, $ACO = BCO = \varphi$, $GC = a$, $G'C = b$ und $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes des ganzen Syſtemes über einer durch O gehenden Horizontalebene; ſo iſt:

$$(W + W')\,\bar{z} = W.\,OM + W'.\,OM';$$

ferner:

$$OM = OC\cos\Theta - CG\cos CH'H$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - a\cos(\varphi + \Theta),$$

und:

$$OM' = OC\cos\Theta - O'G'\cos H'$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - b\cos(\varphi - \Theta);$$

folglich:

$$(W + W')\,\bar{z} = (W + W')\,r.\frac{\cos\Theta}{\sin\varphi}$$
$$- W\,a\cos(\varphi + \Theta) - W'b\sin(\varphi - \Theta).$$

In der Gleichgewichtslage muß aber $\bar{z}$, welches eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen φ, Θ iſt, ein Maximum, oder Minimum werden (§. 67.); folglich iſt:

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = -(W + W')\, r.\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi} + W\, a \sin(\varphi + \Theta) - W'b \sin(\varphi - \Theta) = 0$$

und:

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\varphi} = -(W + W')\, r.\frac{\cos\Theta\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + W\, a \sin(\varphi + \Theta) + W'b \sin(\varphi - \Theta) = 0;$$

also:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{cotg}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{cotg}\varphi$$

und:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{tang}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{tang}\varphi.$$

Zieht man diese beiden letzten Gleichungen von einander ab, so ergibt sich:

$$\frac{\operatorname{tang} 2\Theta}{\operatorname{tang} 2\varphi} = \frac{W'b - Wa}{W'b + Wa}, \qquad (1)$$

und wenn man Θ eliminirt:

$$4\, W W' ab \sin^4\varphi - (W + W')(Wa + W'b)\, r \operatorname{tang}\varphi + (W + W')^2 r^2 = 0,$$

woraus sich φ ergibt, und Θ wird alsdann durch (1) gegeben.

Um den Druck auf das Gewinde C zu finden, sei T der auf AC in der Richtung CT und auf BC in der entgegengesetzten Richtung ausgeübte Druck. Um ferner den unbekannten Druck in P nicht in die Gleichungen zu bekommen, zerlegen wir die den Balken AC im Gleichgewichte haltenden Kräfte nach der Richtung AC und nehmen ihre Momente in Beziehung auf den Punkt P; so ist:

$$T\cos(\pi - ACT) - W\cos AHO = 0,$$

und:

$$T.\, PC \sin ACT - W.\, PG.\, \sin AHO.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\left(\frac{T}{W}\right)^2 = \cos^2 AHO + \frac{\overline{PG}^2}{\overline{PC}^2}\cdot \sin^2 AHO$$

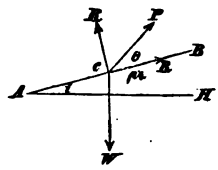
$$= \cos^2(\varphi + \Theta) + \left(\frac{a}{r}\operatorname{tang}\varphi - 1\right)^2 \sin^2(\varphi + \Theta),$$

wodurch T bestimmt ist, und die Richtung, nach welcher T wirkt, wird alsdann gegeben durch:

$$\text{tang } ACT = -\frac{PG}{PC} \cdot \text{tang } AHO$$

$$= (1 - \frac{a}{r} \text{ tang } \varphi) \text{ tang } (\varphi + \Theta).$$

Aufgabe 32. Ein Körper C von dem Gewichte W wird auf einer geneigten Ebene AB zum Theil durch die Reibung und zum Theil durch eine Kraft P im Gleichgewichte erhalten; man soll den kleinsten und größten Werth von P finden.



Auflösung. Wenn P seinen kleinsten Werth hat, so daß der Körper C sich auf der geneigten Ebene abwärts bewegen würde, wenn P noch etwas kleiner würde, und μ bezeichnet den Reibungscoefficienten (§. 82.), so wie R den Normaldruck auf die Ebene; so wirkt die Reibung μR aufwärts nach CB, und wenn man die Kräfte parallel und normal zu AB zerlegt; so ist:

$$\mu R + P \cos \Theta - W \sin i = 0,$$

und:

$$R + P \sin \Theta - W \cos i = 0,$$

wo $\angle BAH = i$ und $\angle BCP = \Theta$ gesetzt ist.

Eliminirt man R aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$P = \frac{\sin i - \mu \cos i}{\cos \Theta - \mu \sin \Theta} \cdot W.$$

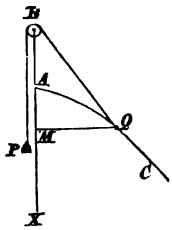
Wenn P seinen größten Werth hat, so daß sich C aufwärts bewegen würde, sobald der Werth von P nur wenig größer würde; so wirkt die Reibung μR abwärts, und man braucht in dem vorhergehenden Ausdrucke nur $-\mu$ für μ zu setzen, um den größten Werth von P zu erhalten, nämlich:

$$\frac{\sin i + \mu \cos i}{\cos \Theta + \mu \sin \Theta} \cdot W.$$

Diese beiden Grenzwerthe von P lassen sich auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{\sin(i - \operatorname{arc\,tang}\,\mu)}{\cos(\Theta + \operatorname{arc\,tang}\,\mu)} \cdot W, \quad \frac{\sin(i + \operatorname{arc\,tang}\,\mu)}{\cos(\Theta - \operatorname{arc\,tang}\,\mu)} \cdot W.$$

Aufgabe 33. An den beiden Enden eines über einen polirten Stift B gehenden Fadens PBQ sind zwei Gewichte P, Q befestigt, wovon das eine P frei herabhängt und das andere Q auf einer Curve AC liegt; man soll die Bedingung und Lage des Gleichgewichtes finden.



Auflösung. Man nehme die Vertikale Bx zur Axe der x und irgend einen Punkt A derselben zum Anfangspunkte der Coordinaten $AM = x$, $QM = y$, und es sei $BP = x'$; so hat man nach dem Principe der virtuellen Momente (§. 59.) offenbar:

$$P\,dx' + Q\,dx = 0.$$

Außerdem hat man die Gleichung:

$$y = f(x)$$

der Curve AC, und, wenn $AB = a$ und die Länge des Fadens $= b$ gesetzt wird, die Relation:

$$b = x' + \sqrt{(a + x)^2 + y^2}.$$

Es sei z. B. die Curve AC eine Parabel und B der Durchschnittspunkt ihrer Axe mit der Richtlinie; so ist:

$$y^2 = 4ax,$$

folglich:

$$b = x' + \sqrt{(a + x)^2 + 4ax},$$

und:

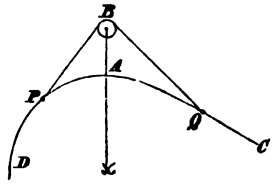
$$0 = dx' + \frac{3a + x}{\sqrt{a^2 + 6ax + x^2}} \cdot dx,$$

also:

$$-P \cdot \frac{3a + x}{\sqrt{a^2 + 6ax + x^2}}\,dx + Q\,dx = 0,$$

woraus folgt:

$$x = -3a + \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{Q^2}}}.$$



Wenn das Gewicht P nicht frei herabhängt, sondern auch auf einer Curve AD liegt, und es sind x', y' die Coordinaten von P, und x, y die von Q in Bezug auf B als Anfangspunkt; so hat man wieder:

$$P\,dx' + Q\,dx = 0,$$

ferner die Gleichungen der beiden Curven:

$$y' = f(x'),\ y = \varphi(x)$$

und die Relation:

$$b = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es sei z. B. AD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Verlängerung von BA liegt, und AC eine Parabel, deren Richtlinie durch B geht; so ist die Gleichung von AC:

$$y^2 = 4a\,(x - a),$$

und die von AD:

$$y'^2 = 2c\,(x' - a) - (x' - a)^2,$$

wo c den Halbmesser des Kreises bedeutet; folglich:

$$b = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{2x'\,(c + a) - 2ac - a^2} + \sqrt{x^2 + 4ax - 4a^2},$$

und:

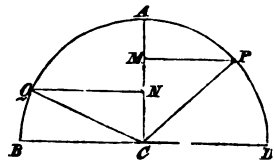
$$0 = \frac{(c + a)\,dx'}{\sqrt{2x'\,(c + a) - 2ac - a^2}} + \frac{(x + 2a)\,dx}{\sqrt{x^2 + 4ax - 4a^2}}$$
$$= \frac{(c + a)\,dx'}{BP} + \frac{(x + 2a)\,dx}{BQ};$$

also:

$$\frac{Q}{P} = -\frac{dx'}{dx} = \frac{x + 2a}{c + a} \cdot \frac{BP}{BQ}$$
$$= \frac{x + 2a}{c + a}\left(\frac{b}{BQ} - 1\right),$$

woraus sich x ergibt, weil BQ als Funktion von x bekannt ist. —

Aufgabe 34. Zwei gegebene Gewichte P, Q sind durch einen Faden PAQ verbunden, welcher quer über einen horizontalen Cylinder gelegt ist; man soll die Lage und Beschaffenheit des Gleichgewichtes finden. —



Auflösung. Offenbar liegt der Faden in einer auf der Axe des Cylinders senkrechten Ebene. Es sei C der Mittelpunkt des kreisförmigen senkrechten Durchschnittes des Cylinders, BCD horizontal und CA vertikal. Da die Länge des Fadens PAQ und der Halbmesser a des Cylinders gegeben sind, so ist $\angle PCQ = 2\alpha$ bekannt. Ferner sei $\angle QCA = \alpha + \Theta$, $\angle PCA = \alpha - \Theta$, und endlich $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes von P und Q über BD; so ist:

$$(P + Q)\,\bar{z} = P.\,CM + Q.\,CN$$
$$= P\,a\cos(\alpha - \Theta) + Q\,a\cos(\alpha + \Theta),$$

folglich:

$$(P + Q)\,\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = P\,a\sin(\alpha - \Theta) - Q\,a\sin(\alpha + \Theta),$$

$$(P + Q)\,\frac{d^2\bar{z}}{d\Theta^2} = -P\,a\cos(\alpha - \Theta) - Q\,a\cos.(\alpha + \Theta)$$
$$= -(P + Q)\,\bar{z}.$$

In der Gleichgewichtslage ist aber:

$$\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = 0,$$

folglich:

$$P\,a\sin(\alpha - \Theta) = Q\,a\sin(\alpha + \Theta),$$

woraus folgt:

$$tang\,\Theta = \frac{P - Q}{P + Q}\,tang\,\alpha,$$

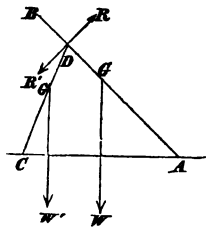
wodurch die Lage des Gleichgewichtes, welches nicht stabil ist, weil $\bar{z}$ ein Maximum ist (§. 67), bestimmt wird. —

also endlich:

$$\cos^2\Theta - \frac{a}{4r}\cos\Theta = \tfrac{1}{2},$$

wodurch Θ bestimmt wird. —

Aufgabe 29. Ein glatter schwerer Balken AB, welcher sich um ein Gewinde in A in einer vertikalen Ebene drehen kann, stützt sich auf einen andern CD, welcher sich in derselben Ebene um C drehen kann. Man soll die Gleichgewichtslage finden. —



Auflösung. Es seien G, G' die Schwerpunkte der beiden Balken, woran ihre Gewichte W, W' angebracht sein mögen, und $R = R'$ der gegenseitige Widerstand der beiden Balken AB, CD in D. Ferner sei $AG = a$, $CD = b$, $AC = c$, $\angle BAC = \Theta$, $\angle ACD = \varphi$; so ist für das Gleichgewicht von AB, wenn man die Momente von R und W in Beziehung auf den Punkt A nimmt:

$$W.\, a.\, \cos\Theta = R.\, AD = R.\, b.\, \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}. \qquad (1)$$

Ebenso hat man, wenn man die Momente von R', W' in Beziehung auf den Punkt C nimmt, für das Gleichgewicht des Balkens CD:

$$W'.\frac{b}{2}\cos\varphi = R'\, b \sin CDR'$$
$$= R\, b \cos CDA, \text{ wegen } R = R'$$
$$= -\, R\, b \cos(\Theta + \varphi),$$

und wenn R mittelst (1) eliminirt wird:

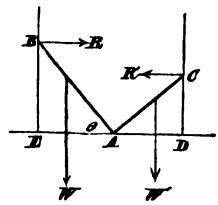
$$2\, W\, a \cos\Theta \sin\Theta \cos(\Theta + \varphi) + W'\, b \cos\varphi \sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Ferner ist:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(\Theta + \varphi)}{\sin\Theta}, \qquad (3)$$

und folglich sind die Werthe von Θ, φ durch (2) und (3) bestimmt.

Aufgabe 30. Zwei Balken AB, AC ſtützen ſich auf der horizontalen Ebene ED in A gegen einander und in B, C gegen zwei vertikale Ebenen EB, DC; es ſind die Längen a, b, ſo wie die Gewichte W, W', der beiden Balken gegeben, und man ſoll die gegenſeitige Entfernung ED der beiden vertikalen Ebenen beſtimmen, wenn der Winkel BAC ein rechter iſt. —



Auflöſung. Der Balken AB wird durch R, W und die in A auf ihn wirkenden Widerſtände im Gleichgewichte gehalten, und um dieſe in den Gleichungen zu vermeiden, wollen wir die Momente von R, W in Beziehung auf den Punkt A nehmen; ſo iſt, wenn $\angle BAE = \Theta$ geſetzt wird:

$$W.\frac{a}{2}\cos\Theta - R\,a\sin\Theta = 0. \qquad (1)$$

Ebenſo erhält man für den Balken AC:

$$W'\frac{b}{2}\sin\Theta - R'\,b\cos\Theta = 0. \qquad (2)$$

Um noch eine Gleichung zwiſchen R und R', aber ohne die in A wirkenden Kräfte zu erhalten, wollen wir annehmen: daß die beiden Balken in A feſt mit einander verbunden ſind, wodurch weder das Gleichgewicht geſtört, noch R oder R' geändert wird. — Alsdann iſt BAC ein feſter Körper, welcher ſich unter der Wirkung der horizontalen Kräfte R, R', ſeines vertikal abwärts wirkenden Gewichtes $W + W'$ und des vertikalen Widerſtandes der Ebene ED in A im Gleichgewichte befindet. Nimmt man folglich die horizontalen Componenten dieſer Kräfte, ſo hat man:

$$R - R' = 0. \qquad (3)$$

Eliminirt man nun R und R' zwiſchen den Gleichungen (1), (2) und (3), ſo erhält man:

$$W\cos^2\Theta = W'\sin^2\Theta,$$

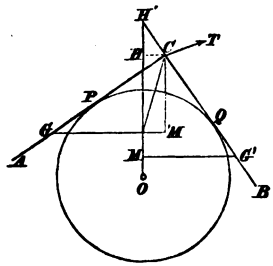
folglich:

$$\tang\Theta = \sqrt{\frac{W}{W'}},$$

und:

$$ED = a \cos\Theta + b \sin\Theta$$
$$= \frac{a + b\, tang\,\Theta}{\sqrt{1 + tang^2\,\Theta}}$$
$$= \frac{a\sqrt{W'} + b\sqrt{W}}{\sqrt{W' + W}}.$$

Aufgabe 31. Zwei gegebene Balken AC, BC, welche in C durch ein Gewinde verbunden sind, werden quer über einen horizontalen polirten Cylinder von einem gegebenen Halbmesser r gelegt; man soll ihre Gleichgewichtslage, so wie den Druck auf ihr Gewinde bestimmen. —



Auflösung. Es seien G, G' die Schwerpunkte von AC, CB; W, W' ihre Gewichte und P, Q ihre Berührungspunkte mit dem Cylinder, dessen Querschnittsmittelpunkt O ist, $\angle COH = \Theta$, $ACO = BCO = \varphi$, $GC = a$, $G'C = b$ und $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes des ganzen Systemes über einer durch O gehenden Horizontalebene; so ist:

$$(W + W')\,\bar{z} = W.\,OM + W'.\,OM';$$

ferner:

$$OM = OC\cos\Theta - CG\cos CH'H$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - a\cos(\varphi + \Theta),$$

und:

$$OM' = OC\cos\Theta - O'G'\cos H'$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - b\cos(\varphi -$$

folglich:

$$(W + W')\,\bar{z} = (W +$$
$$-$$

In der Gleich
der beiden unabhä
oder Minimum

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = -(W + W')\, r.\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi} + W a \sin(\varphi + \Theta) - W'b \sin(\varphi - \Theta) = 0$$

und:

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\varphi} = -(W + W')\, r.\frac{\cos\Theta\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + W a \sin(\varphi + \Theta) + W'b \sin(\varphi - \Theta) = 0;$$

also:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{cotg}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{cotg}\varphi$$

und:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{tang}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{tang}\varphi.$$

Zieht man diese beiden letzten Gleichungen von einander ab, so ergibt sich:

$$\frac{\operatorname{tang} 2\Theta}{\operatorname{tang} 2\varphi} = \frac{W'b - Wa}{W'b + Wa}, \qquad (1)$$

und wenn man Θ eliminirt:

$$4\, W W' ab \sin^2\varphi - (W + W')(Wa + W'b)\, r \operatorname{tang}\varphi + (W + W')^2 r^2 = 0,$$

woraus sich φ ergibt, und Θ wird alsdann durch (1) gegeben.

Um den Druck auf das Gewinde C zu finden, sei T der auf AC in der Richtung CT und auf BC in der entgegengesetzten Richtung ausgeübte Druck. Um ferner den unbekannten Druck in P nicht in die Gleichungen zu bekommen, zerlegen wir die den Balken AC im Gleichgewichte haltenden Kräfte nach der Richtung AC und nehmen ihre Momente in Beziehung auf den Punkt P; so ist:

$$T\cos(\pi - ACT) - W\cos AHO = 0,$$

und:

$$T.\, PC \sin ACT - W.\, PG.\sin AHO.$$

Diesen Gleichungen ergibt sich:

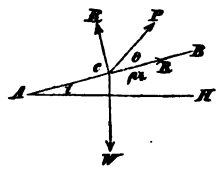
$$\cos^2 AHO + \frac{\overline{PG}^2}{\overline{PC}^2}\cdot\sin^2 AHO = \cos^2(\varphi + \Theta) + \left(\frac{a}{r}\operatorname{tang}\varphi - 1\right)^2 \sin^2(\varphi + \Theta),$$

wodurch T bestimmt ist, und die Richtung, nach welcher T wirkt, wird alsdann gegeben durch:

$$\text{tang } ACT = -\frac{PG}{PC} \cdot \text{tang } AHO$$

$$= (1 - \frac{a}{r} \text{ tang } \varphi) \text{ tang } (\varphi + \Theta).$$

Aufgabe 32. Ein Körper C von dem Gewichte W wird auf einer geneigten Ebene AB zum Theil durch die Reibung und zum Theil durch eine Kraft P im Gleichgewichte erhalten; man soll den kleinsten und größten Werth von P finden.



Auflösung. Wenn P seinen kleinsten Werth hat, so daß der Körper C sich auf der geneigten Ebene abwärts bewegen würde, wenn P noch etwas kleiner würde, und μ bezeichnet den Reibungscoefficienten (§. 82.), so wie R den Normaldruck auf die Ebene; so wirkt die Reibung μR aufwärts nach CB, und wenn man die Kräfte parallel und normal zu AB zerlegt; so ist:

$$\mu R + P \cos \Theta - W \sin i = 0,$$

und:

$$R + P \sin \Theta - W \cos i = 0,$$

wo $\angle BAH = i$ und $\angle BCP = \Theta$ gesetzt ist.

Eliminirt man R aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$P = \frac{\sin i - \mu \cos i}{\cos \Theta - \mu \sin \Theta} \cdot W.$$

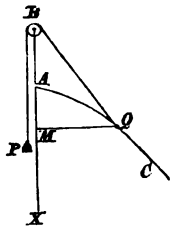
Wenn P seinen größten Werth hat, so daß sich C aufwärts bewegen würde, sobald der Werth von P nur wenig größer würde; so wirkt die Reibung μR abwärts, und man braucht in dem vorhergehenden Ausdrucke nur $-\mu$ für μ zu setzen, um den größten Werth von P zu erhalten, nämlich:

$$\frac{\sin i + \mu \cos i}{\cos \Theta + \mu \sin \Theta} \cdot W.$$

Diese beiden Grenzwerthe von P lassen sich auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{\sin(i - \operatorname{arc\,tang}\,\mu)}{\cos(\Theta + \operatorname{arc\,tang}\,\mu)} \cdot W, \quad \frac{\sin(i + \operatorname{arc\,tang}\,\mu)}{\cos(\Theta - \operatorname{arc\,tang}\,\mu)} \cdot W.$$

Aufgabe 33. An den beiden Enden eines über einen polirten Stift B gehenden Fadens PBQ sind zwei Gewichte P, Q befestigt, wovon das eine P frei herabhängt und das andere Q auf einer Curve AC liegt; man soll die Bedingung und Lage des Gleichgewichtes finden.



Auflösung. Man nehme die Vertikale Bx zur Axe der x und irgend einen Punkt A derselben zum Anfangspunkte der Coordinaten $AM = x$, $QM = y$, und es sei $BP = x'$; so hat man nach dem Principe der virtuellen Momente (§. 59.) offenbar:

$$P\,dx' + Q\,dx = 0.$$

Außerdem hat man die Gleichung:

$$y = f(x)$$

der Curve AC, und, wenn $AB = a$ und die Länge des Fadens $= b$ gesetzt wird, die Relation:

$$b = x' + \sqrt{(a + x)^2 + y^2}.$$

Es sei z. B. die Curve AC eine Parabel und B der Durchschnittspunkt ihrer Axe mit der Richtlinie; so ist:

$$y^2 = 4ax,$$

folglich:

$$b = x' + \sqrt{(a + x)^2 + 4ax},$$

und:

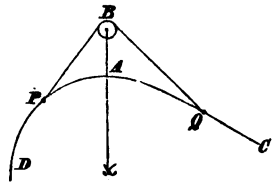
$$0 = dx' + \frac{3a + x}{\sqrt{a^2 + 6ax + x^2}} \cdot dx,$$

also:

$$-P \cdot \frac{3a + x}{\sqrt{a^2 + 6ax + x^2}}\,dx + Q\,dx = 0,$$

woraus folgt:

$$x = -3a + \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{Q^2}}}.$$



Wenn das Gewicht P nicht frei herabhängt, sondern auch auf einer Curve AD liegt, und es sind x', y' die Coordinaten von P, und x, y die von Q in Bezug auf B als Anfangspunkt; so hat man wieder:

$$P\,dx' + Q\,dx = 0,$$

ferner die Gleichungen der beiden Curven:

$$y' = f(x'),\ y = \varphi(x)$$

und die Relation:

$$b = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es sei z. B. AD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Verlängerung von BA liegt, und AC eine Parabel, deren Richtlinie durch B geht; so ist die Gleichung von AC:

$$y^2 = 4a\,(x - a),$$

und die von AD:

$$y'^2 = 2c\,(x' - a) - (x' - a)^2,$$

wo c den Halbmesser des Kreises bedeutet; folglich:

$$b = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{2x'\,(c + a) - 2ac - a^2} + \sqrt{x^2 + 4ax - 4a^2},$$

und:

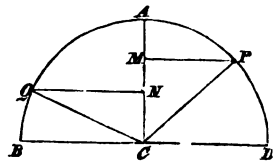
$$0 = \frac{(c + a)\,dx'}{\sqrt{2x'\,(c + a) - 2ac - a^2}} + \frac{(x + 2a)\,dx}{\sqrt{x^2 + 4ax - 4a^2}}$$
$$= \frac{(c + a)\,dx'}{BP} + \frac{(x + 2a)\,dx}{BQ};$$

also:

$$\frac{Q}{P} = -\frac{dx'}{dx} = \frac{x + 2a}{c + a} \cdot \frac{BP}{BQ}$$
$$= \frac{x + 2a}{c + a}\left(\frac{b}{BQ} - 1\right),$$

woraus sich x ergibt, weil BQ als Funktion von x bekannt ist. —

Aufgabe 34. Zwei gegebene Gewichte P, Q sind durch einen Faden PAQ verbunden, welcher quer über einen horizontalen Cylinder gelegt ist; man soll die Lage und Beschaffenheit des Gleichgewichtes finden. —



Auflösung. Offenbar liegt der Faden in einer auf der Axe des Cylinders senkrechten Ebene. Es sei C der Mittelpunkt des kreisförmigen senkrechten Durchschnittes des Cylinders, BCD horizontal und CA vertikal. Da die Länge des Fadens PAQ und der Halbmesser a des Cylinders gegeben sind, so ist $\angle PCQ = 2\alpha$ bekannt. Ferner sei $\angle QCA = \alpha + \Theta$, $\angle PCA = \alpha - \Theta$, und endlich $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes von P und Q über BD; so ist:

$$(P + Q)\,\bar{z} = P.\,CM + Q.\,CN$$
$$= P\,a\cos(\alpha - \Theta) + Q\,a\cos(\alpha + \Theta),$$

folglich:

$$(P + Q)\,\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = P\,a\sin(\alpha - \Theta) - Q\,a\sin(\alpha + \Theta),$$

$$(P + Q)\,\frac{d^2\bar{z}}{d\Theta^2} = -P\,a\cos(\alpha - \Theta) - Q\,a\cos.(\alpha + \Theta)$$

$$= -(P + Q)\,\bar{z}.$$

In der Gleichgewichtslage ist aber:

$$\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = 0,$$

folglich:

$$P\,a\sin(\alpha - \Theta) = Q\,a\sin(\alpha + \Theta),$$

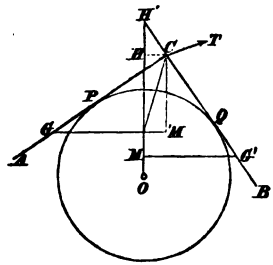
woraus folgt:

$$tang\,\Theta = \frac{P - Q}{P + Q}\,tang\,\alpha,$$

wodurch die Lage des Gleichgewichtes, welches nicht stabil ist, weil $\bar{z}$ ein Maximum ist (§. 67), bestimmt wird. —

und:
$$ED = a\cos\Theta + b\sin\Theta$$
$$= \frac{a + b\,tang\,\Theta}{\sqrt{1 + tang^2\Theta}}$$
$$= \frac{a\sqrt{W'} + b\sqrt{W}}{\sqrt{W' + W}}.$$

Aufgabe 31. Zwei gegebene Balken AC, BC, welche in C durch ein Gewinde verbunden sind, werden quer über einen horizontalen polirten Cylinder von einem gegebenen Halbmesser r gelegt; man soll ihre Gleichgewichtslage, so wie den Druck auf ihr Gewinde bestimmen. —



Auflösung. Es seien G, G' die Schwerpunkte von AC, CB; W, W' ihre Gewichte und P, Q ihre Berührungspunkte mit dem Cylinder, dessen Querschnittsmittelpunkt O ist, $\angle COH = \Theta$, $ACO = BCO = \varphi$, $GC = a$, $G'C = b$ und $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes des ganzen Systemes über einer durch O gehenden Horizontalebene; so ist:

$$(W + W')\,\bar{z} = W.\,OM + W'.\,OM';$$

ferner:
$$OM = OC\cos\Theta - CG\cos CH'H$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - a\cos(\varphi + \Theta),$$

und:
$$OM' = OC\cos\Theta - O'G'\cos H'$$
$$= \frac{r\cos\Theta}{\sin\varphi} - b\cos(\varphi - \Theta);$$

folglich:
$$(W + W')\,\bar{z} = (W + W')\,r.\frac{\cos\Theta}{\sin\varphi}$$
$$- W\,a\cos(\varphi + \Theta) - W'b\sin(\varphi - \Theta).$$

In der Gleichgewichtslage muß aber $\bar{z}$, welches eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen φ, Θ ist, ein Maximum, oder Minimum werden (§. 67.); folglich ist:

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\Theta} = -(W + W')\, r.\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi} + W\, a \sin(\varphi + \Theta) - W' b \sin(\varphi - \Theta) = 0$$

und:

$$(W + W')\frac{d\bar{z}}{d\varphi} = -(W + W')\, r.\frac{\cos\Theta\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + W\, a \sin(\varphi + \Theta) + W' b \sin(\varphi - \Theta) = 0;$$

also:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{cotg}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{cotg}\varphi$$

und:

$$(W + W')\, r \operatorname{cosec}^2\varphi = (Wa - W'b)\operatorname{tang}\Theta + (Wa + W'b)\operatorname{tang}\varphi.$$

Zieht man diese beiden letzten Gleichungen von einander ab, so ergibt sich:

$$\frac{\operatorname{tang} 2\Theta}{\operatorname{tang} 2\varphi} = \frac{W'b - Wa}{W'b + Wa}, \qquad (1)$$

und wenn man Θ eliminirt:

$$4\, W W' ab \sin^2\varphi - (W + W')(Wa + W'b)\, r \operatorname{tang}\varphi + (W + W')^2 r^2 = 0,$$

woraus sich φ ergibt, und Θ wird alsdann durch (1) gegeben.

Um den Druck auf das Gewinde C zu finden, sei T der auf AC in der Richtung CT und auf BC in der entgegengesetzten Richtung ausgeübte Druck. Um ferner den unbekannten Druck in P nicht in die Gleichungen zu bekommen, zerlegen wir die den Balken AC im Gleichgewichte haltenden Kräfte nach der Richtung AC und nehmen ihre Momente in Beziehung auf den Punkt P; so ist:

$$T \cos(\pi - ACT) - W \cos AHO = 0,$$

und:

$$T.\, PC \sin ACT - W.\, PG.\, \sin AHO.$$

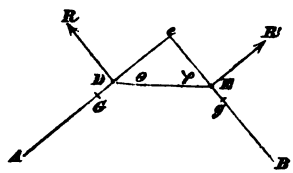
Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\left(\frac{T}{W}\right)^2 = \cos^2 AHO + \frac{\overline{PG}^2}{\overline{PC}^2}\cdot \sin^2 AHO$$

$$= \cos^2(\varphi + \Theta) + \left(\frac{a}{r}\operatorname{tang}\varphi - 1\right)^2 \sin^2(\varphi + \Theta),$$

Wenn also $a \gtreqless \frac{b\sqrt{3}}{2}$ ist, so kann das Paraboloid nur im Gleichgewichte sein, wenn seine Axe vertikal steht. —

Aufgabe 37. Zwei durch ein Gewinde C verbundene Balken AC, CB ruhen auf zwei in derselben Horizontale liegenden glatten Bolzen D, E; man soll die Gleichgewichtslage der Balken finden. —



Auflösung. Es seien G, g die Schwerpunkte und W, W' die Gewichte der Balken R, R' die auf denselben senkrechten Widerstände in D und E, $\angle CDE = \Theta$, $\angle CED = \varphi$, $CG = a$, $Cg = a'$ und $DE = b$.

Der Balken CA ist unter der Wirkung von 3 Kräften, nämlich von R, W und der Spannung des Gelenkes C, welche nach Größe und Richtung unbekannt ist und auch nicht gesucht wird, im Gleichgewichte. —

Um die letztere in den Gleichungen zu vermeiden, nehmen wir die Momente in Beziehung auf den Punkt C, so ist:

$$R.\,DC - W\,a\cos\Theta = 0, \qquad (1)$$

und wenn wir in Beziehung auf den Balken BC ähnlich verfahren; so ergibt sich:

$$R'.\,EC - W'\,a'\sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Wenn das Gleichgewicht eingetreten ist, so kann man ohne Störung desselben annehmen: daß das Gewinde C fest ist. Alsdann ist BCA ein fester Körper, welcher durch die 4 Kräfte R, R', W und W' im Gleichgewichte gehalten wird, und wenn diese Kräfte nach der vertikalen und horizontalen Richtung zerlegt werden; so ist:

$$R\cos\Theta + R'\cos\varphi - W - W' = 0, \qquad (3)$$
$$R\sin\Theta - R'\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

Ferner gibt das Dreieck DEC:

$$DC = \frac{b\sin\varphi}{\sin(\Theta+\varphi)}, \qquad (5)$$

$$EC = \frac{b\sin\Theta}{\sin(\Theta+\varphi)}. \qquad (6)$$

Aus (1) und (5) folgt nun:

$$R = \frac{W\, a \cos\Theta \sin(\Theta + \varphi)}{b \sin\varphi},$$

und aus (2) und (6) folgt:

$$R' = \frac{W'\, a' \cos\varphi \sin(\Theta + \varphi)}{b \sin\varphi}.$$

Werden diese Werthe in (3) und (4) gesetzt, so ergibt sich:

$$W + W' = \sin(\Theta + \varphi)\left(\frac{W\, a \cos^2\Theta}{b \sin\varphi} + \frac{W'\, a' \cos^2\varphi}{b \sin\Theta}\right),$$

und:

$$W\, a \sin^2\Theta \cos\Theta - W'\, a' \sin^2\varphi \cos\varphi = 0,$$

welche beiden letzten Gleichungen zur Bestimmung von Θ und φ genügen. —

Wenn die beiden Balken in jeder Beziehung identisch sind, so gehen die beiden letzten Gleichungen in folgende über:

$$\frac{2b}{a} = \sin(\Theta + \varphi)\left(\frac{\cos^2\Theta}{\sin\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\sin\Theta}\right), \quad (7)$$

$$\sin^2\Theta \cos\Theta - \sin^2\varphi \cos\varphi = 0.$$

Aus der letzten folgt:

$$\Theta = \varphi, \quad (\alpha)$$

oder:

$$1 = \cos^2\Theta + \cos\Theta \cos\varphi + \cos^2\varphi. \quad (\beta)$$

Wenn $\Theta = \varphi$ ist, so gibt die Gleichung (7):

$$\cos\Theta = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}},$$

so daß die beiden Balken AC, BC gegen die durch C gehende Vertikale eine symmetrische Lage haben. —

Die Gleichungen (β) und (7) sind in Beziehung auf Θ und φ symmetrisch, so daß es noch zwei unsymmetrische Gleichgewichtslagen gibt, welche in Bezug auf die erste auf jeder Seite ähnlich liegend sind, und sich aus (β), (7) ergeben.

Aufgabe 38. Ein Körper mit einer beliebigen convexen Oberfläche liegt auf einer horizontalen Ebene; man soll seine Gleichgewichtslage finden.

Auflösung. Es sei $z = f(x, y)$ die Gleichung der Ober-

fläche des Körpers in Bezug auf drei in demselben liegende rechtwinklige Axen, x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes mit der Ebene, und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die des Schwerpunktes in Beziehung auf dieselben Axen.

Wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Coordinatenaxen mit der horizontalen berührenden Ebene bilden, so sind $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$ die Winkel, welche die Vertikale im Berührungspunkte mit denselben Axen bildet, und da diese Vertikale eine Normale der convexen Oberfläche des Körpers ist; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{-\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \\ \sin\beta &= \frac{-\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nun geht aber diese Normale offenbar durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ des Körpers, und folglich sind ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x - \bar{x} + (z - \bar{z})\frac{dz}{dx}, \\ 0 &= y - \bar{y} + (z - \bar{z})\frac{dz}{dy}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1), (2) und die Gleichung:

$$z = f(x, y)$$

sind offenbar zur Bestimmung von x, y, z und α, β, γ genügend. —

Ist z. B. der Körper der achte Theil einer Kugel, welcher zwischen drei durch den Mittelpunkt derselben gelegten, auf einander senkrechten Ebenen liegt; so hat man:

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \qquad (3)$$

folglich:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}. \qquad (4)$$

Ferner findet man leicht (Aufg. 213.):

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3a}{8},$$

und wenn man dieſe Werthe in (2) ſetzt, ſo folgt daraus:

$$x = y = z,$$

und aus (3), (4):

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{dz}{dx} = -1, \quad \frac{dz}{dy} = -1;$$

folglich:

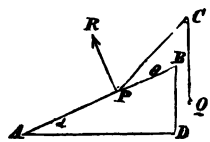
$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 39. Jede von den beiden Kräften P, Q hält einen Körper von dem Gewichte W auf einer polirten geneigten Ebene im Gleichgewichte, indem P nach horizontaler Richtung und Q nach der Länge der geneigten Ebene wirkt; man ſoll W finden. —

Auflöſung. Es iſt:

$$W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}.$$

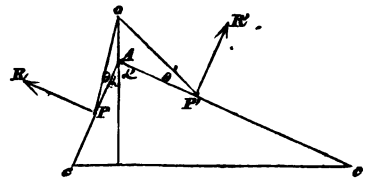
Aufgabe 40. Zwei Gewichte P, Q ſind an den Enden eines über die Rolle C gehenden Fadens befeſtigt; P liegt auf der glatten geneigten Ebene AB und Q hängt frei herab. Man ſoll die Gleichgewichtslage und den Druck R auf die geneigte Ebene finden. —



Auflöſung. Es ſei $\angle BAD = \alpha$ und $\angle CPB = \Theta$, ſo iſt:

$$\cos\Theta = \frac{P\sin\alpha}{Q}, \quad R = P\cos\alpha - \sqrt{Q^2 - P^2\sin^2\alpha}.$$

Aufgabe 41. Zwei Körper P, P' liegen auf den geneigten Ebenen AC, AC' und sind durch einen Faden verbunden, welcher über eine in der Vertikale durch A liegende Rolle O geht. Man soll die Lagen von P und P' finden, wenn P eben im Gleichgewichte gehalten wird. —



Auflösung. Es sei a die Länge des Fadens POP', T seine überall gleiche Spannung, W, W' die Gewichte von P, P'; μ, μ' die Coefficienten der Reibung auf den Ebenen CA, $C'A$ und R, R' ihre Widerstände, so wie α, α' ihre Neigungen gegen die Vertikale, $\angle OPA = \Theta$, $\angle OP'A = \Theta'$; so wirkt die Reibung in P nach der Richtung CA und die in P' nach der Richtung AC', und für das Gleichgewicht von P hat man, wenn man die Kräfte parallel und senkrecht zu CA zerlegt:

$$\mu R + T \cos(\alpha - \Theta) = W \cos\alpha, \qquad (1)$$
$$R + T \sin(\alpha - \Theta) = W \sin\alpha, \qquad (2)$$

und ebenso für das Gleichgewicht von P':

$$\mu' R' + W' \cos\alpha' = T \cos(\alpha' - \Theta'), \qquad (3)$$
$$R' + T \sin(\alpha' - \Theta') = W' \sin\alpha'. \qquad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$T[\cos(\alpha - \Theta) - \mu \sin(\alpha - \Theta)] = W(\cos\alpha - \mu \sin\alpha),$$

und aus (3) und (4):

$$T[\cos(\alpha' - \Theta') + \mu \sin(\alpha' - \Theta')] = W'(\cos\alpha' + \mu' \sin\alpha').$$

Wird T zwischen diesen beiden letzten Gleichungen eliminirt, so ergibt sich:

$$W'(\cos\alpha' + \mu' \sin\alpha').[\cos(\alpha - \Theta) - \mu \sin(\alpha - \Theta)]$$
$$= W(\cos\alpha - \mu \sin\alpha).[\cos(\alpha' - \Theta') + \mu' \sin(\alpha' - \Theta')].$$

Setzt man $\mu = tang\,\omega$, $\mu' = tang\,\omega'$, so verwandelt sich diese letzte Gleichung in folgende:

$$W' \cos(\alpha' - \omega') \cos(\alpha - \Theta + \omega)$$
$$= W \cos(\alpha + \omega) \cos(\alpha' - \Theta' - \omega'). \qquad (5)$$

Wenn man $CA = k$ setzt, so ist ferner:

$$OP = \frac{k \sin \alpha}{\sin(\alpha - \Theta)}, \quad OP' = \frac{k \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \Theta')},$$

und folglich wegen $OP + OP' = a$:

$$a = \frac{k \sin \alpha}{\sin(\alpha - \Theta)} + \frac{k \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \Theta')}. \qquad (6)$$

Die Winkel Θ, Θ' ergeben sich nun aus (5) und (6).

Aufgabe 42. Es ist die halbe Summe und die halbe Differenz des größten und kleinsten Winkels gegeben, welchen die Richtung einer Kraft P mit einer rauhen geneigten Ebene macht, worauf sie ein Gewicht W in Ruhe erhält. Ebenso ist gegeben die kleinste Elevation der Ebene, bei welcher der Körper allein anfängt sich abwärts zu bewegen. Man soll nun den Winkel bestimmen, welchen die Richtung derselben Kraft P mit einer polirten Ebene von derselben Elevation bilden muß, um denselben Körper darauf im Gleichgewichte zu halten. —

Auflösung. Es sei ω der kleinste Winkel, welchen die Richtung der Kraft P mit der rauhen Ebene bildet, indem sie den Körper darauf im Gleichgewichte hält, R der Normalwiderstand der Ebene, μ der Reibungscoefficient und α die Elevation der Ebene. Da in diesem Falle die Reibung abwärts wirkt, so hat man für das Gleichgewicht des Körpers in Beziehung auf die zu der geneigten Ebene parallelen Componenten:

$$P \cos \omega = \mu R + W \sin \alpha,$$

und für die auf der Ebene normalen Componenten:

$$P \sin \omega + R = W \cos \alpha.$$

Wenn man R zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so ergibt sich:

$$P(\cos \omega + \mu \sin \omega) = W(\mu \cos \alpha + \sin \alpha). \qquad (1)$$

Es sei φ die kleinste Elevation der Ebene, bei welcher der Körper herabzugleiten beginnen will, so ist $tang\, \varphi = \mu$ (§. 85.) und auch (1):

$$P = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\omega - \varphi)} \cdot W. \qquad (2)$$

Wenn ω' den größten Winkel bezeichnet, welchen die Richtung

von P im Gleichgewichtszustande mit der geneigten Ebene bilden kann, so wirkt die Reibung aufwärts. Setzt man folglich μ negativ, oder $-\varphi$ für φ und ω' für ω in (2); so hat man:

$$P = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\omega' + \varphi)} \cdot W. \qquad (3)$$

Bezeichnet ferner ω'' den Winkel, welchen P mit einer polirten Ebene von derselben Elevation, wie die der rauhen, bildet, und man setzt in (2), $\varphi = 0$ und ω'' für ω; so ist:

$$P = \frac{\sin\alpha}{\cos\omega''} \cdot W. \qquad (4)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\cos(\omega - \varphi) + \cos(\omega' + \varphi) = \frac{W}{P}\,[\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha - \varphi)],$$

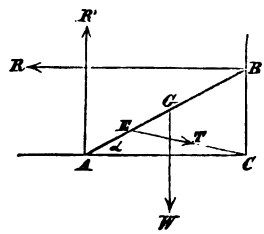
und wenn $S = \frac{1}{2}(\omega' + \omega)$, $D = \frac{1}{2}(\omega' - \omega)$ gesetzt wird:

$$2\cos S\cos(D + \varphi) = 2\frac{W}{P}\sin\alpha\cos\varphi$$
$$= 2\cos\omega''\cos\varphi, \text{ wegen } (4),$$

folglich:

$$\cos\omega'' = \frac{\cos S}{\cos\varphi}\cos(D + \varphi).$$

Aufgabe 43. Ein Balken AB stützt sich mit dem einen Ende in A gegen eine glatte horizontale und mit dem andern Ende in B gegen eine glatte vertikale Ebene, indem die Vertikalebene durch die Axe des Balkens auf diesen beiden Ebenen senkrecht steht und sie resp. nach AC und BC durchschneidet; ein gegebener Punkt E des Balkens ist mit dem Punkte C durch ein gewichtloses Seil CE verbunden, dessen Spannung T gesucht wird. —



Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, W das Gewicht desselben, $\angle ECA = \omega$, $\angle BAC = \alpha$ und $AG = GB = a$, R die Reaction oder der Widerstand in B und R' der in A; so ist der Balken unter der Wirkung der 4 Kräfte T, W, R, R' im Gleichgewichte. Die Componenten derselben nach AC und BC geben:

$$R - T\cos = 0, \qquad (1)$$
$$R' - W - T\sin\omega = 0; \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Beziehung auf den Punkt C nimmt:

$$R.\,2a\sin\alpha + Wa\cos\alpha - R'.\,2a\cos\alpha = 0$$

oder:

$$2R\sin\alpha + W\cos\alpha = 2R'\cos\alpha. \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt:

$$2T\cos\omega\sin\alpha + W\cos\alpha = 2W\cos\alpha + 2T\sin\omega\cos\alpha,$$
$$2T(\cos\omega\sin\alpha - \cos\alpha\sin\omega) = W\cos\alpha,$$
$$2T\sin(\alpha - \omega) = W\cos\alpha;$$

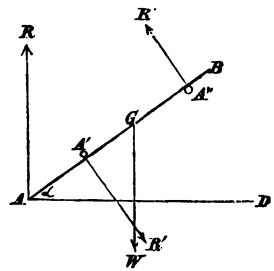
folglich:

$$T = \frac{W\cos\alpha}{2\sin(\alpha - \omega)}.$$

Wenn $\omega = \alpha$ ist, so ist $T = \infty$, d. h. alsdann ist keine, auch noch so große Spannung des Seiles im Stande, den Balken im Gleichgewichte zu halten. —

Wenn $\omega > \alpha$ ist, so ist T offenbar negativ, folglich das Gleichgewicht des Balkens unmöglich, weil das Seil wohl eine Zug- aber keine Schiebkraft ausüben kann. — Soll also das Gleichgewicht möglich sein, so muß immer $\alpha > \omega$ sein. —

Aufgabe 44. Ein glatter Balken AB liegt zwischen zwei in derselben Vertikalebene liegenden Bolzen A', A'' und stützt sich mit seinem untern Ende auf eine glatte horizontale Ebene AD; man soll den Druck auf die Bolzen und auf die horizontale Ebene bestimmen. —



Auflösung. Dieser Druck ist resp. den Reactionen R', R'', R gleich. Es sei G der Schwerpunkt und W das Gewicht des Balkens; $AG = a$, $A'A'' = b$ und $\angle BAD = \alpha$; so ist der Balken unter der Wirkung der 4 Kräfte R, R', R'', W im Gleichgewichte. Die Componenten derselben nach AB geben:

$$W\sin\alpha = R\sin\alpha, \text{ also } R = W, \qquad (1)$$

und die Componenten nach einer auf AB senkrechten Richtung:

$$R' + W \cos\alpha - R'' - R \cos\alpha = 0;$$

folglich wegen (1):

$$R' = R''. \qquad (2)$$

Nimmt man ferner die Momente in Bezug auf den Punkt A, so hat man:

$$R''. \overline{AA''} - R'. \overline{AA'} - W a \cos\alpha = 0,$$

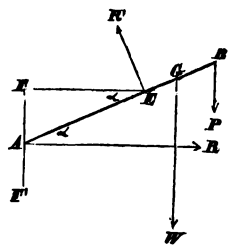
also wegen (2):

$$R'. b = W. a. \cos\alpha,$$

folglich:

$$R' = R'' = \frac{W a \cos\alpha}{b}.$$

Aufgabe 45. Ein Balken AB ruhet in einer Vertikalebene auf einem Bolzen E und stützt sich mit seinem untern Ende A gegen eine vertikale Ebene FF', welche auf der ersten senkrecht ist; man soll seine Gleichgewichtslage, so wie den Druck in A und E finden. —



Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt und W das Gewicht des Balkens AB, $EF = c$, $AG = a$, $\angle AET = EAR = \alpha$ und R, R' seien die Widerstände oder Druckkräfte in A und E, welche resp. auf FF' und AB senkrecht sind; so ist der Balken AB unter der Wirkung der Kräfte R, R' und W im Gleichgewichte. Die Componenten derselben nach AB und nach der darauf senkrechten Richtung geben:

$$R \cos\alpha = W \sin\alpha, \qquad (1)$$
$$R' = W \cos\alpha + R \sin\alpha, \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt E nimmt:

$$\begin{aligned} R. AE \sin\alpha &= W. \overline{EG} \cos\alpha \\ &= W (AG - AE) \cos\alpha \\ &= W (a \cos\alpha - c); \end{aligned}$$

folglich:

$$R. c. \sin\alpha = W (a \cos^2\alpha - c \cos\alpha). \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot c.\ W = W\ (a\cos^2\alpha - c\cos\alpha),$$

$$\frac{c}{\cos\alpha} = a\cos^2\alpha, \text{ also } \cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \qquad (4)$$

wodurch die Lage des Balkens bestimmt wird.

Aus (1) und (4) folgt weiter:

$$R = W\tang\alpha = W\,\frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^2}}}{\sqrt[3]{\frac{c}{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2}}}{\sqrt[3]{c}}\cdot W.$$

und aus (1) und (2):

$$R' = W\cos\alpha + W\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha},$$

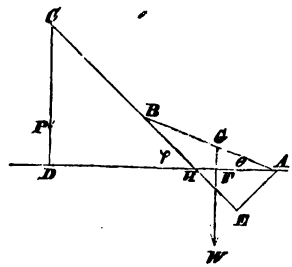
also wegen (4):

$$R' = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}\cdot W,$$

wodurch der Druck in A und E bestimmt wird. —

Wenn $c > a$ wäre, so wäre nach (4) auch $\cos\alpha > 1$, was unmöglich ist. Das Gleichgewicht ist also unmöglich, sobald $c > a$ wird. —

Aufgabe 46. Ein in einer Vertikalebene liegender Balken AB ist in dieser Ebene um den Punkt A drehbar, und das andere Ende B des Balkens ist an einem Seile befestigt, welches über eine in derselben Vertikalebene liegende Rolle C geht, und ein Gewicht P trägt; man soll die Gleichgewichtslage des Balkens finden. —



Auflösung. AD ist horizontal und CD vertikal, G der Schwerpunkt des Balkens und W sein Gewicht. Es sei $AG = a$, $BG = b$, $AD = k$,

$CD = l$, $\angle BAD = \Theta$ und $\angle CHD = \varphi$; so hat man, wenn man die Momente von P und W in Bezug auf den Punkt A nimmt:

$$P.\ \overline{AE} = W.\ AF,$$

oder:

$$P\,(a + b)\ \sin(\varphi - \Theta) = W\ a\ \cos\Theta. \qquad (1)$$

Ferner ist:

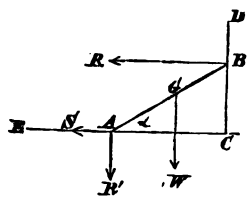
$$(a + b)\ \sin\Theta + BC\ \sin\varphi = l,$$
$$(a + b)\ \cos\Theta + BC\ \cos\varphi = k;$$

folglich, wenn man BC eliminirt:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(a + b)\ \sin\Theta - l}{(a + b)\ \cos\Theta - k}, \qquad (2)$$

so daß durch (1) und (2) die Werthe von Θ, φ bestimmt sind. —

Aufgabe 47. Ein Balken AB kann sich um ein Gewinde an seinem untern Ende A drehen und lehnt sich mit dem obern Ende B gegen eine vertikale Ebene CD, welche auf der durch seine Axe gelegten Vertikalebene senkrecht ist; man soll den Druck auf die Vertikalebene und auf das Gewinde finden. —



Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, woran sein Gewicht W angebracht gedacht wird, $AB = a$, $AG = b$, $\angle BAC = \alpha$, R die Reaction der vertikalen Ebene CD und R', S die vertikale und horizontale Componente des Druckes auf das Gewinde A; so ist:

$$R = \frac{Wb}{a\ \operatorname{tang}\alpha} = S,\ R' = W.$$

Aufgabe 48. Eine gleichförmig schwere Leiter stützt sich mit ihrem untern Ende auf eine glatte horizontale Ebene, womit sie einen Winkel von 30° bildet, und mit dem obern Ende auf eine unter einem Winkel von 60° gegen den Horizont geneigte Ebene; man soll die Kraft finden, welche in horizontaler Richtung an dem Fuße der Leiter wirken muß, damit sie nicht fortgleitet. —

Auflösung. Wenn W das Gewicht der Leiter bedeutet, so ist die gesuchte Kraft gleich:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot W.$$

Aufgabe 49. Eine Kugel liegt auf zwei geneigten Ebenen; man soll den Druck finden, welchen sie auf jede derselben ausübt. —

Auflösung. Wenn W das Gewicht der Kugel, α, α' die Neigungen der Ebenen gegen den Horizont und R, R' die gesuchten Druckkräfte bezeichnen; so ist:

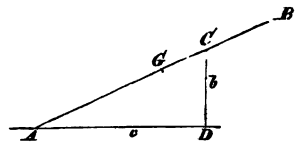
$$R = \frac{W \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad R' = \frac{W \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

Aufgabe 50. Ein gleichförmig schwerer Balken ruhet auf zwei geneigten glatten Ebenen; man soll seine Gleichgewichtslage, so wie den auf jede Ebene ausgeübten Druck R, R' finden. —

Auflösung. Wenn α, α', Θ die Neigungen der beiden Ebenen und des Balkens gegen den Horizont bezeichnen, und W ist das Gewicht des Balkens; so ist:

$$\tan g\, \Theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha' \sin \alpha}, \quad R = \frac{W \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad R = \frac{W \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

Aufgabe 51. Ein Balken AB ruhet auf einer vertikalen Stütze CD, während sein unteres Ende A auf einer glatten horizontalen Ebene liegt und mit dem festen Punkte D durch ein Seil AD verbunden ist. Man soll die Spannung dieses Seiles finden. —



Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt und W das Gewicht des Balkens, $AG = a$, $CD = b$, $AD = c$ und T die gesuchte Spannung; so ist:

$$T = \frac{abc}{\sqrt{(b^2 + c^2)^3}} \cdot W.$$

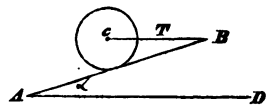
Aufgabe 52. Ein gleichförmig schwerer Balken AB (Fig. auf S. 118.) ruhet auf einem festen Punkte E, während sein unteres Ende A sich gegen eine vertikale Linie FF' stützt und an seinem andern Ende B ein Gewicht P aufgehangen ist; man soll seine Gleichgewichtslage finden. —

Auflösung. Es sei $AB = a$, das Perpendikel $EF = b$, $AE = x$ und W das Gewicht des Balkens; so ist:

$$x = \sqrt[3]{ab^2 \cdot \frac{P + \frac{1}{2}W}{P + W}}.$$

Wenn $W = 0$ gesetzt wird, so ist $x = \sqrt[3]{ab^2}$ für jeden Werth von P. —

Aufgabe 53. Eine Kugel, deren Mittelpunkt C ist, wird durch einen horizontalen Faden CB auf einer geneigten Ebene AB im Gleichgewichte gehalten; man soll die Spannung T des Fadens finden. —



Auflösung. Wenn W das Gewicht der Kugel und α die Neigung der Ebene bedeutet, so ist:

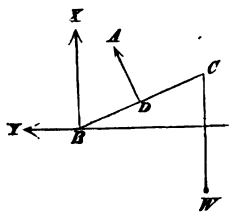
$$T = W \, tang \, \alpha.$$

Aufgabe 54. Eine gleichförmig schwere Stange von der Länge a liegt auf einem im Brennpunkte einer Parabel von dem Parameter $= 4m$ befestigten Stifte und ruhet mit ihrem unteren Ende auf der Parabel, deren Axe vertikal steht. Man soll den Winkel Θ finden, welchen die Stange in ihrer Gleichgewichtslage mit der Axe der Parabel bildet. —

Auflösung. Es ist:

$$\Theta = 2 \, arc \cos \sqrt[4]{\frac{m}{a}}.$$

Aufgabe 55. Die gewichtlose Stange CB ist in ihrer Mitte D mittelst des auf ihr senkrechten Fadens AD aufgehangen, indem sie sich um ihren einen festen Endpunkt B drehen kann, und an dem andern Endpunkte C ein Gewicht W aufgehangen ist. Man soll die Richtung und Größe des Druckes auf den festen Punkt B finden, wenn die Stange einen Winkel von 30^0 mit der Horizontale bildet. —



Auflösung. Es sei $BD = DC = a$ und Y, X resp. die horizontale und vertikale Componente des Druckes auf den festen Punkt B; so ist:

$$X = \tfrac{1}{2} W, \; Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot W,$$

folglich die Resultante:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = W,$$

und ihre Neigung φ gegen die Vertikale $= \frac{1}{2}\pi$.

Aufgabe 56. Die Gleichgewichtslage einer gleichförmig schweren Stange zu finden, welche sich mit dem einen Ende gegen eine vertikale Ebene und mit dem andern gegen die innere Fläche einer hohlen Halbkugel stützt. —

Auflösung. Es sei r der Halbmesser der Kugel, c die Entfernung ihres Mittelpunktes von der vertikalen Ebene, $2a$ die Länge der Stange, Θ die Neigung derselben gegen den Horizont und φ die des Kugelhalbmessers, welcher nach dem Berührungspunkte mit der Stange geht; so ist:

$$tang\,\varphi = 2\,tang\,\Theta,\ 2a\cos\Theta = r\cos\varphi + c.$$

Aufgabe 57. Ein gleichförmig schwerer Balken stützt sich mit dem einen Ende gegen eine glatte Vertikalebene, während das andere Ende mittelst eines Seiles mit einem festen Punkte dieser Ebene verbunden ist. Man soll die Gleichgewichtslage des Balkens, den Druck gegen die Ebene und die Spannung des Seiles finden. —

Auflösung. Es sei b die Länge und T die Spannung des Seiles, $2a$ die Länge des Balkens, W sein Gewicht, R sein Druck gegen die Vertikalebene und φ, Θ resp. die Neigung des Balkens und des Seiles gegen die Vertikale; so ist:

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{16a^2 - b^2}{3b^2}},\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{16a^2 - b^2}{12a^2}},$$

$$T = \frac{\sqrt{3}.\,b.\,W}{\sqrt{4b^2 - 16a^2}},\ R = \sqrt{\frac{16a^2 - b^2}{4b^2 - 16a^2}}.\,W$$

Aufgabe 58. Ein gleichförmig schweres gleichschenkliges Dreieck wird in eine polirte hohle Halbkugel gelegt, und man soll die Gleichgewichtslage desselben finden. —

Auflösung. Es sei a die Länge jeder der beiden gleichen Seiten des Dreieckes und h die Höhe desselben, r der Halbmesser der Kugel und Θ die Neigung des Dreieckes gegen die Vertikale; so ist:

$$tang\,\Theta = \frac{3\sqrt{4r^2h^2 - a^4}}{4h^2 - 3a^2}.$$

Aufgabe 59. An dem Rande einer auf einer horizontalen Ebene liegenden gleichförmig schweren hohlen Halbkugel ist ein gegebenes Gewicht P aufgehangen; man soll die Gleichgewichtslage der Halbkugel finden. —

Auflösung. Wenn W das Gewicht derselben, a den Abstand ihres Schwerpunktes von ihrem Mittelpunkte und Θ die Neigung ihrer Axe gegen die Vertikale bezeichnet; so ist:

$$tang\,\Theta = \frac{P.r}{W.c}.$$

Aufgabe 60. In einer Vertikalebene befinden sich in der gegenseitigen Entfernung $= a$ zwei glatte Stifte, zwischen welchen ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hängt; man soll die Gleichgewichtslage desselben finden, wenn die beiden Stifte in derselben Horizontale liegen. —

Auflösung. Es sei das Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse $= h$ und die Neigung der letztern gegen die Horizontale $= \Theta$, so ist:

$$\Theta = 0, \text{ oder } \Theta = arc\,cos\,(\frac{h}{3a}).$$

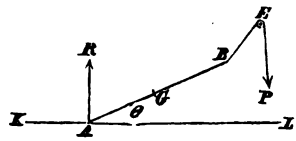
Aufgabe 61. Eine gleichförmig schwere Kreisscheibe ruhet in ihrem Mittelpunkte auf einem vertikalen Stifte; an welchen Punkten ihres Umfanges müssen drei gegebene Gewichte w_1, w_2, w_3 angebracht werden, damit die Scheibe in horizontaler Lage im Gleichgewichte bleibt? —

Auflösung. Die Mittelpunktswinkel (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_2, w_3) müssen so beschaffen sein, daß:

$$cos\,(w_1, w_2) = -\frac{w_1^2 + w_2^2 - w_3^2}{2w_1 w_2},$$

$$cos\,(w_1, w_3) = -\frac{w_1^2 + w_3^2 - w_2^2}{2w_1 w_3},$$

$$cos\,(w_2, w_3) = -\frac{w_2^2 + w_3^2 - w_1^2}{2w_2 w_3}.$$



Aufgabe 62. Ein gleichförmig schwerer Balken AB liegt mit dem einen Ende A auf einer rauhen horizontalen Ebene KL, während an dem andern

Ende B ein Seil befeſtigt iſt, welches über eine glatte Rolle E geht und ein Gewicht P trägt. Man ſoll die ſucceſſiven Gleichgewichtslagen des Balkens finden. —

Auflöſung. Es ſei G der Schwerpunkt des Balkens, W ſein Gewicht, Θ, φ die Neigungswinkel von AB, BE in irgend einer Lage gegen die Horizontale, $AG = BG = a$, F die in A nach LK wirkende Reibung und R die vertikale Reaction der Ebene auf den Balken; ſo haben wir für das Gleichgewicht deſſelben zwiſchen den horizontalen Componenten der auf denſelben wirkenden Kräfte die Relation:

$$F = P \cos\varphi, \qquad (1)$$

und zwiſchen den vertikalen Componenten derſelben:

$$R + P \sin\varphi = W, \qquad (2)$$

und wenn wir die Momente in Beziehung auf den Punkt A nehmen:

$$W.\, a.\, \cos\Theta = P.\, 2\, a.\, \sin(\varphi - \Theta),$$

oder:

$$W.\, \cos\Theta = 2P \sin(\varphi - \Theta). \qquad (3)$$

Wir wollen $F = \lambda R$ ſetzen, wo λ irgend einen zwiſchen o und μ liegenden Werth hat, indem μ wieder den Reibungscoefficienten bezeichnet. Alsdann iſt nach (1):

$$\lambda R = P \cos\varphi, \qquad (4)$$

und nach (2), (4):

$$P \cos\varphi + \lambda P \sin\varphi = \lambda W,$$

oder wenn $\lambda = tang\, \omega$ geſetzt wird:

$$P \cos(\varphi - \omega) = W \sin\omega,$$

wodurch φ als Function von W, P, ω gegeben iſt, und Θ ergibt ſich alsdann aus (3). Gibt man nun ω alle Werthe von o bis $arc\, tang\, \mu$, ſo erhält man die ſucceſſiven Gleichgewichtslagen des Balkens. —

Setzt man z. B. $\lambda = 0$, ſo iſt nach (4):

$$P \cos\varphi = 0, \text{ folglich } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

und wegen (3):

$$W \cos\Theta = 2P \cos\Theta,$$

also entweder $W = 2P$, in welchem Falle Θ unbestimmt bleibt, oder $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Weiter folgt aus (2) wegen $\Theta = \frac{\pi}{2}$:

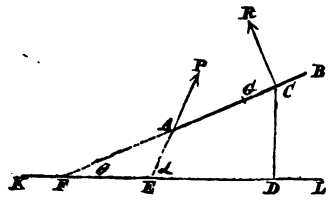
$$R = W - P. \qquad (5)$$

Wenn also nicht $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $R = P = \frac{1}{2} W$ sein. —

Das Ende B des Balkens muß also in der Vertikale durch E liegen, und wenn AB nicht vertikal ist; so muß das Gewicht $P = \frac{1}{2} W$ sein. — Wenn AB vertikal ist, so erhellet aus (5), daß P einen beliebigen Werth von o bis W haben kann; aber keinen größern Werth, weil R nicht negativ werden kann. —

Wenn wir für λ einen andern Werth zwischen o und μ gesetzt hätten, so hätten sich die Werthe von Θ und φ ebenso ergeben. —

Aufgabe 63. Ein Balken AB wird durch eine Kraft P auf einer Stütze CD gehalten; man soll seine Lage bestimmen, wenn er eben fortgleiten will, so daß C sich B nähert. —



Auflösung. Man verlängere BA und PA, bis sie die Horizontale KL in F und E schneiden. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, $AC = a$, $CG = x$, $\angle PEL = \alpha$, $\angle AFE = \Theta$, R der auf AB normale Widerstand der Stütze CD und μ der Reibungscoefficient; so ist μR die nach der Richtung BA wirkende Reibung. Für das Gleichgewicht des Balkens hat man alsdann zwischen den vertikalen Componenten:

$$P \sin\alpha + R \cos\Theta = W + \mu R \sin\Theta, \qquad (1)$$

so wie zwischen den horizontalen:

$$P \cos\alpha = R \sin\Theta + \mu R \cos\Theta, \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt C nimmt:

$$W. x \cos\Theta = P(a + x) \sin(\alpha - \Theta). \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{\cos\Theta - \mu \sin\Theta}{\sin\Theta + \mu \cos\Theta} = \frac{W - P \sin\alpha}{P \cos\alpha},$$

und folglich:

$$P\cos\alpha\,(1-\mu\,tang\,\Theta) = (W - P\sin\alpha)\,(tang\,\Theta+\mu),$$
$$P\,(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) - \mu W = [W + P\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)]\,tang\,\Theta.$$

Setzt man $\mu = tang\,\omega$, und multiplicirt beide Seiten dieser Gleichung mit $\cos\omega$, so ist:

$$P\cos(\omega-\alpha) - W\sin\omega = [P\sin(\omega-\alpha) + W\cos\omega]\,tang\,\Theta;$$

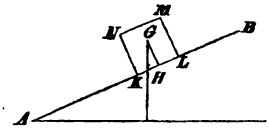
folglich:

$$tang\,\Theta = \frac{P\cos(\omega-\alpha) - W\sin\omega}{P\sin(\omega-\alpha) + W\cos\omega}.$$

Nachdem Θ gefunden ist, wird x durch (3) gegeben, so daß folglich die gesuchte Lage des Balkens vollständig bestimmt ist. —

Wenn die Lage des Balkens gesucht wird, wo er eben nach der entgegengesetzten Richtung fortgleiten will, so muß man in den vorhergehenden Formeln — μ oder — ω für μ oder ω setzen. —

Aufgabe 64. Ein gleichförmig schweres rechtwinkliges Parallelepipedum *KLMN* liegt auf einer rauhen geneigten Ebene *AB*, deren Neigungswinkel gegen den Horizont allmälig vergrößert wird; man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht zuerst durch Rollen, oder durch Gleiten des Parallelepipedums gestört wird. —



Auflösung. Wir wollen annehmen: daß das Gleiten zuerst stattfindet, und es sei R der Druck auf die Ebene, μ der Reibungscoefficient und φ die Neigung der Ebene im Augenblicke des Beginnens der Bewegung; so geben die zu der geneigten Ebene parallelen Componenten:

$$\mu R = W\sin\varphi$$

und die auf derselben normalen Componenten:

$$R = W\cos\varphi,$$

woraus sich durch Elimination von R ergibt:

$$tang\,\varphi = \mu.$$

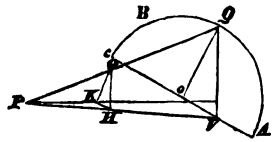
Nehmen wir jetzt an: daß das Rollen des Parallelepipedums zuerst beginnt, so geht die Vertikale durch G bei dem entsprechenden

Werthe von φ durch K, und wenn man $HK = a$, $GH = b$ ſetzt; ſo iſt:

$$tang\ \varphi = tang\ KGH = \frac{a}{b}.$$

Je nachdem alſo $\mu \lessgtr \frac{a}{b}$ iſt, findet das Gleiten, oder Rollen zuerſt ſtatt, und wenn $\mu = \frac{a}{b}$ iſt, ſo tritt beides zugleich ein.

Aufgabe 65. Ein Balken PQ, welcher ſich um das Ende P nach jeder Richtung frei drehen kann, ſtützt ſich mit dem andern Ende Q gegen eine rauhe vertikale Ebene ABC; man ſoll ſeine Lage für den Grenzzuſtand des Gleichgewichtes finden. —



Auflöſung. Aus P ziehe man PO ſenkrecht auf die Ebene ABC, ſo wie OQ; ſo iſt der geometriſche Ort von Q ein in der Vertikalebene liegender Kreis, deſſen Mittelpunkt O iſt. Es ſei G der Schwerpunkt des Balkens, PHV die Projektion von PGQ auf die durch PO gelegte Horizontalebene, indem H und V die Projektionen von G und Q ſind, HK ſenkrecht auf PO, W das Gewicht des Balkens, μ der Reibungscoefficient und R der Normaldruck auf die Vertikalebene; ſo wirkt die Reibung μR nach der Tangente des geometriſchen Ortes von Q, alſo rechtwinklig auf OQ und in der Ebene ABC von A gegen B. — Ferner ſei $PG = a$, $QG = b$, $\angle QPO = \alpha$, $\angle QOA = \Theta$; ſo hat man für das Gleichgewicht des Balkens, indem man die Momente in Beziehung auf PO nimmt:

$$W.\overline{HK} = \mu R.\overline{OQ}. \qquad (1)$$

Nimmt man weiter die Momente in Beziehung auf die horizontale, durch P gehende und auf PO ſenkrechte gerade Linie, indem man bemerkt: daß die vertikale Componente von $\mu R = \mu R\ cos\ QOV$ iſt; ſo hat man:

$$W.\overline{PK} = R.\overline{QV} + \mu R.\ PO\ cos\ QOV. \qquad (2)$$

Ferner iſt:

$$\overline{HK} = GK\ cos\ \Theta = a\ sin\ \alpha\ cos\ \Theta,$$
$$\overline{OQ} = (a + b)\ sin\ \alpha,\ \overline{PO}\ cos\ QOV = (a + b)\ cos\ \alpha\ cos\ \Theta,$$
$$\overline{PK} = a\ cos\ \alpha,\ QV = OQ\ sin\ \Theta = (a + b)\ sin\ \alpha\ sin\ \Theta.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt nun:

$$W.\ a.\ \sin\alpha\ \cos\Theta = \mu R\ (a + b)\ \sin\alpha, \qquad (3)$$

und:

$$W\ a\ \cos\alpha = R\ (a + b)\ \sin\alpha\ \sin\Theta + \mu R\ (a + b)\ \cos\alpha\ \cos\Theta; \qquad (4)$$

folglich:

$$\frac{(4)}{(3)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\ \cos\Theta} = \frac{\sin\alpha\ \sin\Theta + \mu\ \cos\alpha\ \cos\Theta}{\mu\ \sin\alpha},$$

$$\mu\ \cos\alpha = \cos\Theta\ (\sin\alpha\ \sin\Theta + \mu\ \cos\alpha\ \cos\Theta),$$

$$\mu\ \cos\alpha\ \sin^2\Theta = \sin\alpha\ \sin\Theta\ \cos\Theta,$$

$$\mu\ tang\,\Theta = tang\,\alpha$$

$$tang\,\Theta = \frac{1}{\mu}\ tang\,\alpha.$$

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch auf folgende Weise lösen: Wenn man die Momente in Bezug auf die durch P gehende Vertikale nimmt, so hat man, weil $\mu R\ \sin\Theta$ die horizontale Componente von μR ist:

$$R.\ \overline{OV} = \mu\ R.\ \sin\Theta.\ \overline{PO},$$

und folglich:

$$\overline{OQ}\ \cos\Theta = \mu\ \sin\Theta.\ \overline{PO};$$

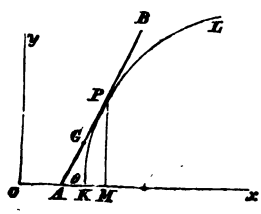
aber:

$$\overline{OQ} = \overline{OP}.\ tang\,\alpha,$$

also:

$$tang\,\alpha\ \cos\Theta = \mu\ \sin\Theta,\ tang\,\Theta = \frac{1}{\mu}\ tang\,\alpha.$$

Aufgabe 66. Ein Balken AB steht auf einer rauhen horizontalen Ebene Ox und lehnt sich in irgend einem Punkte P gegen eine rauhe ebene Curve KPL, indem er sich stets im Grenzzustande des Gleichgewichtes befindet, und der Reibungscoefficient für die horizontale Ebene und die Curve derselbe ist. Man soll die Gleichung der Curve finden. —



Auflösung. Es sei PM senkrecht

auf Ox, G der Schwerpunkt des Balkens, W sein Gewicht, $AG = a$, $\angle BAx = \Theta$, $OM = x$, $PM = y$, μ der Reibungscoefficient und R, R' die Normalwiderstände der Curve und der Ebene, so daß die Reibung μR nach PB und die Reibung $\mu R'$ nach Ax wirkt. Für das Gleichgewicht des Balkens geben die Componenten nach Ax:

$$R \sin\Theta = \mu R \cos\Theta + \mu R',$$

oder:

$$R (\sin\Theta - \mu \cos\Theta) = \mu R', \qquad (1)$$

und die Componenten nach Oy:

$$R \cos\Theta + \mu R \sin\Theta + R' = W,$$

oder:

$$R (\cos\Theta + \mu \sin\Theta) + R' = W, \qquad (2)$$

und wenn man endlich die Momente in Bezug auf den Punkt A nimmt:

$$R. \overline{AP} = W a \cos\Theta, \text{ oder } R. \overline{AM} = W a \cos^2\Theta. \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(1 + \mu^2) R \sin\Theta = \mu W,$$

und folglich wegen (3):

$$(1 + \mu^2) W a \sin\Theta \cos^2\Theta = \mu W. \overline{AM},$$
$$(1 + \mu^2) a \sin\Theta \cos^2\Theta = \mu \overline{AM}.$$

Es ist aber:

$$\sin\Theta = \frac{dy}{ds}, \cos\Theta = \frac{dx}{ds}, \overline{AM} = y \frac{dx}{dy};$$

folglich:

$$(1 + \mu^2) a \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds^2}{dx^2} = \mu y \frac{dx}{dy},$$

oder:

$$a (1 + \mu^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mu y \left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

Setzt man $\mu = tang\, \omega$, so wird diese letzte Gleichung:

$$\frac{2a}{\sin 2\omega}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

welches die gesuchte Gleichung ist. —

Aufgabe 67. Ein Balken stützt sich gegen eine horizontale und eine vertikale Ebene; es ist seine Länge, die Lage seines Schwerpunktes und der Reibungscoefficient für jede der beiden Ebenen gegeben; man soll die Lage seines Gleichgewichtes finden. —

Auflösung. Wenn a, b die Abstände des Schwerpunktes des Balkens von seinem untern und obern Ende, μ, μ' die Reibungscoefficienten für die beiden Ebenen und Θ die Neigung des Balkens gegen den Horizont bezeichnen; so ist:

$$tang\,\Theta = \frac{a - \mu\mu' b}{\mu(a + b)}.$$

Aufgabe 68. Ein gleichförmig schwerer Balken liegt auf zwei Ebenen, deren Neigungen gegen den Horizont α, α' und deren Reibungscoefficienten $tang\,\lambda$, $tang\,\lambda'$ sind; man soll den Grenzwerth der Neigung Θ des Balkens gegen den Horizont, so wie die Relation zwischen seinem Gewichte W und den Normaldruckkräften R, R' auf die Ebenen finden.

Auflösung. Es ist:

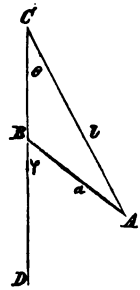
$$2\,tang\,\Theta = cotg(\alpha' + \lambda') - cotg(\alpha + \lambda),$$

$$\frac{R}{\cos\lambda\,\sin(\alpha' + \lambda')} = \frac{W}{\sin(\alpha - \lambda + \alpha' - \lambda')} = \frac{R'}{\cos\lambda'\,\sin(\alpha - \lambda)}.$$

Aufgabe 69. Ein gleichförmig schweres gerades Brett liegt mit seiner Mitte quer über einen rauhen horizontalen Cylinder. Man soll das größte Gewicht finden, welches an dem einen Ende des Brettes aufgehangen werden kann, ohne daß das Brett von dem Cylinder herabgleitet.

Auflösung. Wenn W das Gewicht und a die Länge des Brettes, P das daran aufgehangene Gewicht, r den Halbmesser des Cylinders und $tang\,\lambda$ den Reibungscoefficienten bezeichnet; so ist:

$$\frac{P}{W} = \frac{r\lambda}{a - r\lambda}.$$



Aufgabe 70. Ein gleichförmig schwerer Balken AB stützt sich mit dem einen Ende B gegen eine rauhe vertikale Ebene CD, während das andere Ende A desselben mittelst eines Seiles AC an einem festen Punkte C der Ebene CD aufgehangen ist; man soll die Grenzgleichgewichtslage des Balkens finden. —

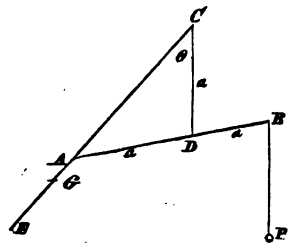
Auflösung. Es sei $AB = a$, $CA = l$, $\angle ACB = \Theta$, $\angle ABD = \varphi$, und μ der Reibungscoefficient; so ist:

$$(4a^2 - 4l^2 - \mu^2 l^2)\, tang\Theta - 2\mu l^2\, tang\Theta + 4a^2 - l^2 = 0,$$

woraus Θ abgeleitet werden muß, und φ ergibt sich alsdann aus der Relation:

$$a.\ sin\varphi = l.\ sin\Theta.$$

Aufgabe 71. Ein gleichförmig schwerer Balken AB kann sich um seine Mitte D drehen, während sich der Balken CE um ein in der Vertikale durch D liegendes Gewinde C drehen kann und sich gegen AB stützt, an dessen Ende B ein Gewicht P aufgehangen ist. Man soll die Gleichgewichtslage beider Balken finden, wenn $CE = AD = BD$ ist.



Auflösung. Es sei $AD = CD = BD = a$, $\angle ACD = \Theta$, $CG = b$, wo G der Schwerpunkt des Balkens CE ist, R der in A stattfindende gegenseitige Druck der beiden Balken, und W das Gewicht von CE; so hat man für das Gleichgewicht von CE, wenn man die Momente in Beziehung auf den Punkt C nimmt:

$$R.\, 2a\ cos\Theta = W.\, b\ sin\Theta,$$

und für das Gleichgewicht von AB, wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt D nimmt:

$$R\, a\ cos\Theta = P\, a\ sin 2\Theta \text{ oder } R = 2\, P sin\Theta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Elimination von R:

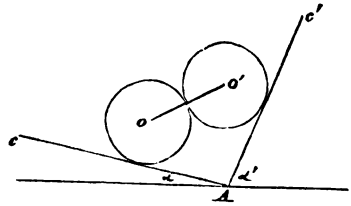
$$W\, b\ sin\Theta = 2P\, a\ sin 2\Theta = 4\, P\, a\ sin\Theta\ cos\Theta;$$

folglich:

$$\Theta = 0, \text{ oder } \cos\Theta = \frac{b\,W}{4\,aP},$$

wodurch die Gleichgewichtslage der beiden Balken bestimmt ist. —

Aufgabe 72. Zwei Kugeln O, O' liegen zwischen zwei polirten geneigten Ebenen AC, AC' und berühren einander; man soll ihre Gleichgewichtslage finden. —



Auflösung. Es seien W, W' die Gewichte der Kugeln O, O', R ihr gegenseitiger Druck und α, α', Θ die Neigungswinkel von AC, AC', OO' gegen den Horizont; so geben die Componenten nach AC für das Gleichgewicht der Kugel O:

$$R\cos(\alpha + \Theta) = W\sin\alpha,$$

und die Componenten nach AC' für das der Kugel O':

$$R\cos(\alpha' - \Theta) = W'\sin\alpha'.$$

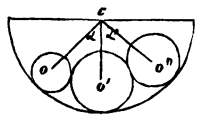
Wenn man R zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$W\sin\alpha\cos(\alpha' - \Theta) = W'\sin\alpha'\cos(\alpha + \Theta),$$
$$W\,\mathrm{tang}\,\alpha\,(1 + \mathrm{tang}\,\alpha'\,\mathrm{tang}\,\Theta) = W'\,\mathrm{tang}\,\alpha'\,(1 - \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\Theta),$$

also:

$$\mathrm{tang}\,\Theta = \frac{W'\,\mathrm{tang}\,\alpha' - W\,\mathrm{tang}\,\alpha}{(W' + W)\,\mathrm{tang}\,\alpha'\,\mathrm{tang}\,\alpha}.$$

Aufgabe 73. In einer hohlen Halbkugel liegen drei massive Kugeln O, O', O'' so in gegenseitiger Berührung, daß die Mittelpunkte der hohlen und der massiven Kugeln in derselben Vertikalebene sind; man soll die Gleichgewichtslage der letztern finden. —



Auflösung. Es seien W, W', W'' die Gewichte der drei massiven Kugeln, $CO = r$, $CO' = r'$, $CO'' = r''$, $\angle OCO' = \alpha$, $\angle O'CO'' = \alpha'$ und die Neigung von $O'C$ gegen den Horizont $= \Theta$. Da die Richtungen des Druckes zwischen der

höhlen und jeder massiven Kugel durch den Mittelpunkt C der erstern gehen, und wenn jede einzelne Kugel im Gleichgewichte ist, auch das aus allen bestehende System im Gleichgewichte sein muß; so haben wir, wenn wir die Momente in Beziehung auf den Punkt C nehmen:

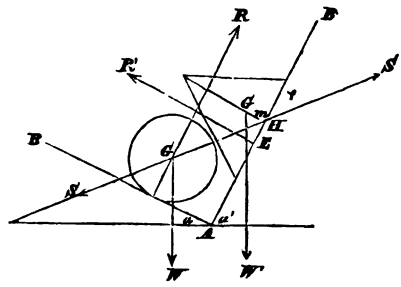
$$W r \cos(\Theta - \alpha) + W' r' \cos\Theta + W'' r'' \cos(\Theta + \alpha') = 0,$$

$$W r (\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tang}\Theta) + W' r' + W'' r'' (\cos\alpha'' - \sin\alpha'' \operatorname{tang}\Theta) = 0;$$

folglich:

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{W'' r'' \cos\alpha'' + W' r' + W r \cos\alpha}{W'' r'' \sin\alpha'' - W r \sin\alpha}.$$

Aufgabe 74. Eine Kugel und ein Kegel von gegebenen Gewichten liegen zwischen zwei geneigten Ebenen, deren gegenseitiger Durchschnitt horizontal ist, in Berührung; man soll die Gleichgewichtsbedingungen derselben finden. —



Auflösung. Es seien W, W' die Gewichte der Kugel und des Kegels, R die Wirkung der Ebene AB auf die Kugel und S die gegenseitige Wirkung zwischen Kugel und Kegel, deren Richtung mit der Ebene AB' offenbar einen Winkel φ bildet, welcher dem halben Winkel des Kegels an der Spitze gleich ist. Die Ebene AB' übt auf jedes Element der Basis des Kegels eine Normalwirkung aus und die Resultante aus allen diesen Wirkungen ist eine Kraft R', welche an irgend einem Punkte E der Basis angebracht ist. Endlich seien α, α' die Neigungen der Ebenen AB, AB', so geben die zu der Ebene AB parallen Componenten für das Gleichgewicht der Kugel:

$$W \sin\alpha = S \cos(\alpha + \alpha' - \varphi), \qquad (1)$$

und die auf AB normalen Componenten geben:

$$R = W \cos\alpha + S \sin(\alpha + \alpha' - \varphi). \qquad (2)$$

Die Gleichung der Momente in Beziehung auf G ist eine identische, weil alle auf die Kugel wirkenden Kräfte durch ihren Mittelpunkt gehen.

Für das Gleichgewicht des Kegels geben die zu der Ebene AB' parallelen Componenten der auf denselben wirkenden Kräfte:

$$W' \sin\alpha' = S \cos\varphi, \qquad (3)$$

während die auf AB' normalen Componenten geben:

$$R' = W' \cos\alpha' + S \sin\varphi, \qquad (4)$$

und wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt G' nimmt:

$$R'x = S y \cos\varphi, \qquad (5)$$

wo $EH = x$ und $mG = y$ gesetzt ist.

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{W \sin\alpha}{W' \sin\alpha'} = \frac{\cos(\alpha + \alpha' - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (6)$$

woraus sich $tang\,\varphi$ leicht ableiten läßt, und welches die einzige Gleichgewichtsbedingung ist, was auch einleuchtet, wenn man bemerkt: daß durch die Gleichungen (2), (4), (5) vier unbekannte Größen R, R, x, y eingeführt werden, wovon in jeder dieser Gleichungen wenigstens eine erscheint, welche in (1) und (3) nicht vorkommt. — Es gibt also unendlich viele Gleichgewichtslagen. Wenn der Werth von φ aus (6) abgeleitet ist, so wird S durch (1) oder (3), und folglich R, R' durch (2) und (4) gegeben. — Aus (5) ergibt sich x, wenn y bekannt ist, welches nur der Fall sein kann, wenn die Größe der Kugel und des Kegels bekannt und eine besondere Gleichgewichtslage gewählt ist.

Aufgabe 75. Zwei gleichförmig schwere Balken AC, CA' stehen auf einer Horizontalebene und stützen sich gegen einander, so daß die kleine Berührungsfläche bei C vertikal ist, und sind im Gleichgewichte; man soll die Relation zwischen ihren Gewichten W, W' und ihren Neigungen φ, φ' gegen den Horizont finden. —

Auflösung. Es ist:

$$W\,tang\,\varphi = W'\,tang\,\varphi'.$$

Aufgabe 76. Zwei glatte Cylinder von den Halbmessern r, r' werden durch ein um sie gelegtes Seil gegen einander gedruckt; man soll das Verhältniß des gegenseitigen Druckes R zu der Spannung T des Seiles finden. —

Auflösung. Man findet:

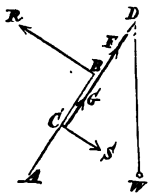
$$\frac{R}{T} = \frac{4\sqrt{rr'}}{r + r'}.$$

Aufgabe 77. Eine Kugel von einem gegebenen Gewichte und Halbmesser ist mittelst eines Fadens von gegebener Länge an einem festen Punkte aufgehangen, woran zugleich ein anderes Gewicht an einem so langen Faden aufgehangen ist, daß dieses Gewicht unter der Kugel liegt. Man soll den Winkel finden, welchen der Faden der Kugel mit der Vertikale bildet.

Auflösung. Wenn P das Gewicht, Q die Summe aus P und dem Gewichte der Kugel, a den Halbmesser der Kugel und b die Entfernung des Mittelpunktes von dem Aufhängepunkte derselben bezeichnet; so ist der gesuchte Winkel:

$$\varphi = arc\ sin \sqrt{\frac{P.a}{Q.b}}.$$

Aufgabe 78. Ein fester Balken AB macht mit der Vertikale einen Winkel α und ist in B und C mit einem andern Balken CD verbunden, an dessen Ende D ein Gewicht W aufgehangen ist; man soll den in B und C auf CD von AB ausgeübten Druck finden, wenn das Gewicht von CD unbeachtet bleibt.

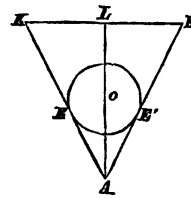


Auflösung. Es seien F, G die Componenten nach CD des in B und C ausgeübten Druckes, R, S die auf CD normalen Componenten desselben und $CD = b$, $CB = c$; so ist:

$$R = \frac{b}{c} W \sin\alpha, \quad S = \frac{b - c}{c} W \sin\alpha$$
$$F + G = W \cos\alpha,$$

wo also die einzelnen Werthe von F und G unbestimmt sind. —

Aufgabe 79. Zwei in einer Vertikalebene liegende gleichförmig schwere Balken AK, AK' sind an ihrem untern Ende A durch ein Gewinde und an den obern Enden K, K' durch ein Seil KK' verbunden, und zwischen sie wird eine schwere Kugel gelegt. Wenn alsdann angenommen wird, daß sich das Seil verkürzt, so soll man die Spannung desselben für den



Augenblick bestimmen, wo sich die Kugel aufwärts bewegen will, wenn die Reibung zwischen der Kugel und jedem Balken gegeben ist. —

Auflösung. Offenbar müssen die beiden Balken mit der Vertikale durch A gleiche Winkel bilden, weil der Schwerpunkt des ganzen Systemes in dieser Linie AL liegt. — Es seien R, R' die Normalwirkungen der Balken auf die Kugel und F, F' die von der Reibung herrührenden Wirkungen nach ihrer Länge, $\angle KAK' = 2\alpha$, T die Spannung des Seiles KK', W das Gewicht der Kugel, W' das eines Balkens und $2a$ die Länge desselben; so geben die zu LA parallelen Componenten für das Gleichgewicht der Kugel:

$$(F + F')\cos\alpha + W = (R + R')\sin\alpha, \qquad (1)$$

während die auf AL normalen Componenten geben:

$$(F' - F)\sin\alpha = (R - R')\cos\alpha, \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Bezug auf den Mittelpunkt O der Kugel nimmt:

$$F.\overline{OE} = F'.OE', \text{ oder } F = F'. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$R = R'. \qquad (4)$$

Wir wollen nun annehmen: daß in Folge der Wirkung des Seiles der Punkt E der Kugel längs des Balkens AK fortgleiten will; so ist, wenn μ den Reibungscoefficienten bezeichnet:

$$F = \mu R,$$

und folglich wegen (1), (3) und (4):

$$2\mu R\cos\alpha + W = 2R\sin\alpha;$$

folglich, wenn man $\mu = tang\,\omega$ setzt:

$$R = \frac{W}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{W\cos\omega}{2\sin(\alpha - \omega)}. \qquad (5)$$

Weiter folgt aus (3) und (4)

$$\frac{F'}{R'} = \frac{F}{R} = \mu, \text{ also } F' = \mu R'.$$

Wenn also μ' den Coefficienten der Reibung zwischen der Kugel und dem Balken AK' bezeichnet, so ist μ nicht größer als μ', weil der größte Werth von $F' = \mu' R'$ ist. Wenn $\mu < \mu'$ ist, so rollt

die Kugel bei der kleinsten Zunahme der Spannung des Seiles KK' längs AK' ohne Gleiten fort — und wenn $\mu = \mu'$ ist, so fängt die Kugel an beiden Balken zugleich an zu gleiten.

Ferner hat man für das Gleichgewicht von AK, wenn man die Momente in Bezug auf A nimmt, und bemerkt: daß die Wirkung und Gegenwirkung zwischen der Kugel und den Balken einander gleich und entgegengesetzt sind:

$$R.\ \overline{AE} + W'a\ \sin\alpha = T.\ 2a\ \cos\alpha,$$

und folglich, wenn r den Halbmesser der Kugel bedeutet:

$$R\,r\ \mathrm{cotg}\,\alpha + W'a\ \sin\alpha = 2\,T\,a\ \cos\alpha,$$

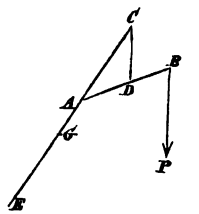
also, wenn man für R seinen Werth (5) setzt:

$$\frac{W\,r\ \cos\omega\ \cos\alpha}{2\sin\alpha\ \sin(\alpha - \omega)} + W'a\sin\alpha = 2\,T\,a\,\cos\alpha,$$

und mithin:

$$T = \frac{W\,r\ \cos\omega}{4a\ \sin\alpha\ \sin(\alpha - \omega)} + \tfrac{1}{2}\,W'\ \mathrm{tang}\,\alpha.$$

Aufgabe 80. AB ist ein gleichförmig schwerer, um seine Mitte D beweglicher Balken und CE ist ein Balken, welcher sich um das in der Vertikale durch D befindliche Gewinde C drehen kann und sich gegen das Ende A des Balkens AB stützt, an dessen anderm Ende B ein Gewicht P aufgehangen ist. Ferner ist $CD = AD = BD$, und man hat die Größe des Winkels ACD in dem Augenblicke beobachtet, wo das Ende A des Balkens AB längs CE fortgleiten will; man soll nun den Coefficienten der Reibung zwischen den beiden Balken finden. —



Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens CE, μ der Reibungscoefficient, R die auf CE normale gegenseitige Wirkung der beiden Balken, $\angle\, ACD = \beta = CAD$, $AD = a = BD$, $CG = b$ und $4\,Q$ das Gewicht des Balkens CE; so hat man für das Gleichgewicht desselben, wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt C nimmt:

$$R.\ 2a.\ \cos\beta = 4\,Q.\ b.\ \sin\beta,$$

oder:

$$a\,R\,\cos\beta = 2\,b\,Q\,\sin\beta, \qquad (1)$$

und für das Gleichgewicht von AB, wenn man die Momente in Beziehung auf den Punkt D nimmt:

$$R\,a\,\cos\beta = \mu\,R\,a\,\sin\beta + P.\,a.\,\sin 2\,\beta,$$

oder:

$$R\,(\cos\beta - \mu\,\sin\beta) = P\,\sin 2\,\beta. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{2\,b\,Q\,\sin\beta}{a\,\cos\beta}\,(\cos\beta - \mu\,\sin\beta) = 2\,P\,\sin\beta\,\cos\beta,$$

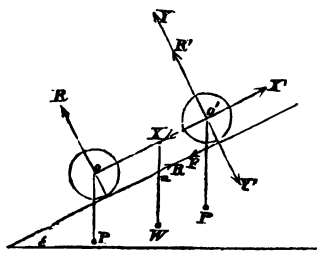
also:

$$b\,Q\,(1 - \mu\,tang\,\beta) = a\,P\,\cos\beta,$$

und:

$$\mu = \frac{b\,Q - a\,P\cos\beta}{b\,Q\,tang\,\beta}.$$

Aufgabe 81. Ein Gewicht W ist in der Mitte einer gewichtslosen starren Stange aufgehangen, welche die Mittelpunkte O, O' zwei gleicher schwerer Räder verbindet, die auf einer rauhen geneigten Ebene stehen, indem das eine O gehemmt ist; man soll den größten Neigungswinkel der Ebene finden, bei welchem das System noch im Gleichgewichte bleibt.



Auflösung. Es sei P das Gewicht und r der Halbmesser eines jeden der beiden Räder, $OO' = 2a$, φ die Neigung der Ebene gegen den Horizont, R, R' die auf der geneigten Ebene normalen Reactionen derselben gegen die Räder, also μR die Reibung des Rades O auf der Ebene, F die Wirkung der Ebene auf das Rad O' normal gegen R', X, Y die zu der Ebene parallelen und normalen Componenten der Wirkung des Rades O auf die Stange OO' und X', Y' dieselben Componenten der Gegenwirkung; so hat man für das Gleichgewicht des Rades O und der Stange OO' als ein

System betrachtet, zwischen den zu der geneigten Ebene parallelen Componenten:

$$\mu R = X + (P + W) \sin\varphi, \qquad (1)$$

und zwischen den Normalcomponenten:

$$R + Y = (P + W) \cos\varphi, \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Beziehung auf O nimmt:

$$\mu R r + 2a Y = W a \cos\varphi. \qquad (3)$$

Ferner hat man für das Gleichgewicht des Rades O', wenn man die Momente in Bezug auf seinen Berührungspunkt mit der Ebene nimmt:

$$X' r = P r \sin\varphi \text{ oder } X = P \sin\varphi. \qquad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt wegen $X' = X$:

$$\mu R = (2P + W) \sin\varphi. \qquad (5)$$

Ferner folgt aus (2) und (3):

$$\mu r R + 2a (P + W) \cos\varphi - 2a R = W a \cos\varphi,$$

oder:

$$(2a - \mu r) R = a (2P + W) \cos\varphi, \qquad (6)$$

und aus (5), (6) ergibt sich die gesuchte Neigung:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mu a}{2a - \mu r}.$$

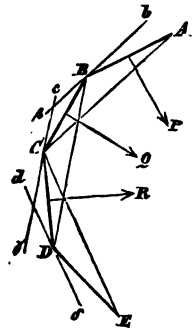
Hat man φ gefunden, so ergibt sich R aus (5) und X' oder X aus (4), also Y aus (2), und F ist die einzige an dem Rade O' wirkende Kraft, welche nicht durch seinen Mittelpunkt geht, und folglich $= 0$ sein muß. —

Aufgabe 82. Zwei gleiche Balken AC, CB liegen in einer Vertikalebene, sind in C durch ein glattes Gewinde verbunden und stehen mit ihren untern Enden A, B auf einer rauhen horizontalen Ebene. Man hat den größten Winkel $ACB = \beta$ beobachtet, bei welchem das Gleichgewicht noch stattfindet, und soll daraus den Reibungscoefficienten μ für die Enden A und B ableiten:

Auflösung. Es ist:

$$\mu = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta.$$

Aufgabe 83. *ABCDE* ... ist ein Vieleck, dessen Seiten vollkommen starr und um die Eckpunkte *A*, *B*, *C*, *D*, ... beweglich sind. An den Mittelpunkten der Seiten sind nach darauf normalen Richtungen Kräfte *P*, *Q*, *R*, ... angebracht, welche sich wie die Seiten verhalten; man soll nun die Gleichgewichtsform des Vieleckes finden, wenn die Längen seiner Seiten gegeben sind. —



Auflösung. Es seien *p*, *q*, *r*, *s*, ... die nach gewissen geraden Linien $bB\beta$, $cC\gamma$, $dD\delta$, ... gerichteten gegenseitigen Einwirkungen der Seiten des Vieleckes an den Ecken *A*, *B*, *C*, *D*, ...; so geben die auf *BC* normalen Componenten für das Gleichgewicht der Seite *BC*:

$$Q = q \sin CB\beta + r \sin BCc, \qquad (1)$$

und die zu *CB* parallelen Componenten geben:

$$q \cos BC\beta = r \cos BCc, \qquad (2)$$

und wenn man die Momente in Beziehung auf den Mittelpunkt von *BC* nimmt:

$$q \sin CB\beta = r \sin BCc. \qquad (3)$$

Nun ist:

$$\frac{(3)}{(2)} = tang\, CB\beta = tang\, BCc,$$

also:

$$\angle CB\beta = \angle BCc, \qquad (4)$$

und mithin wegen (2) oder (3):

$$q = r. \qquad (5)$$

Weiter folgt aus (1) und (3):

$$Q = 2r \sin BCc,$$

und ganz auf gleiche Weise ergibt sich:

$$R = 2r \sin DC\gamma;$$

folglich ist:

$$\frac{Q}{R} = \frac{\sin BCc}{\sin DC\gamma}.$$

Aber nach der Voraussetzung ist:

$$\frac{Q}{R} = \frac{BC}{DC} = \frac{\sin BDC}{\sin CBD};$$

folglich:

$$\frac{\sin BCc}{\sin DC\gamma} = \frac{\sin BDC}{\sin CBD}.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\angle BCc + \angle DC\gamma = \angle BDC + \angle CBD,$$

also:

$$\angle BCc = \angle BDC. \qquad (6)$$

Ebenso wird bewiesen, daß:

$$\angle CB\beta = \angle BAC,$$

mithin wegen (4):

$$\angle BDC = \angle BAC. \qquad (7)$$

Ein durch A, B, C gehender Kreis geht also auch durch D, und ebenso ergibt sich: daß der durch B, C, D gehende Kreis auch durch E gehen muß, u. s. f. Die Winkelspitzen des Vieleckes müssen also im Gleichgewichtszustande desselben im demselben Kreisumfange liegen. —

Aus (5) folgt:

$$p = q = r = s = \ldots,$$

und aus (6) erhellet, daß $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, ... Tangenten an dem durch A, B, C, ... gehenden Kreise sind.

Auch der Werth von $p = q = r \ldots$ läßt sich leicht finden; denn es ist:

$$Q = 2r \sin BCc,$$

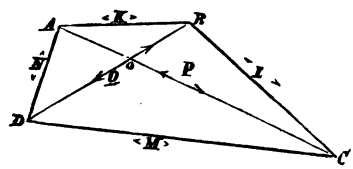
und da $\angle BCc$ der Hälfte des der BC Seite entsprechenden Winkels am Mittelpunkte des um das Vieleck beschriebenen Kreises gleich ist; so hat man:

$$\sin BCc = \frac{\frac{1}{2} BC}{\text{Halbmesser}} = \frac{\frac{1}{2} BC}{\varrho},$$

folglich:

$$r = \frac{Q}{BC} \cdot \varrho = k. \varrho.$$

Aufgabe 84. Das Viereck $ABCD$ besteht aus 4 starren Stäben, welche sich um A, B, C, D drehen können, und die Punkte A, C, so wie B, D sind durch Fäden AC, BD von gegebener Spannung verbunden; man soll die geometrischen Bedingungen für das Gleichgewicht des Viereckes finden. —



Auflösung 1. Es seien P, Q die Spannungen der Fäden AC, BD, und K, L, M, N die Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen den Punkten (A, B), (B, C), (C, D), (D, A); so ist die nach der Richtung AC auf den Punkt A wirkende Kraft P der nach AB wirkenden Kraft:

$$P\frac{\sin CAD}{\sin BAD} = P.\frac{\sin ADB}{\sin BAD}.\frac{DO}{AO} = P.\frac{OD}{BD}.\frac{AB}{OA}$$

und einer gewissen nach AD wirkenden Kraft F äquivalent.

Ebenso ist die nach der Richtung BD auf den Punkt B wirkende Kraft Q der nach BA wirkenden Kraft:

$$Q.\frac{OC.\,AB}{AC.\,OB}$$

und einer gewissen nach AD wirkenden Kraft G äquivalent. Es wirkt also auf den Punkt A nach der Richtung AD eine Kraft $= F - N$, und nach der Richtung AB eine Kraft;

$$P.\frac{OD.\,AB}{BD.\,OA} - K,$$

und für das Gleichgewicht desselben hat man folglich:

$$F - N = 0,\ P.\frac{OD.\,AB}{BD.\,OA} - K = 0. \qquad (1)$$

Ebenso hat man für das Gleichgewicht des Punktes B:

$$G - L = 0,\ Q.\frac{OC.\,AB}{AC.\,OB} - K = 0. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun:

$$P.\frac{OD.AB}{BD.OA} = Q.\frac{OC.AB}{AC.OB},$$

also:

$$\frac{PO.D}{BD.OA} = \frac{Q.OC}{AC.OB}.$$

welches die gesuchte Bedingung für das Gleichgewicht des Viereckes ist. —

Auflösung 2. Wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt B nimmt, so hat man für das Gleichgewicht von AB:

$$N.BD\ \sin BDA = P.BO\ \sin BOC,$$

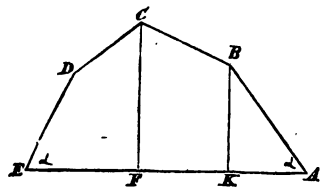
und wenn man die Momente in Beziehung auf den Punkt C nimmt, so hat man für das Gleichgewicht von CD:

$$N.CA.\ \sin CAD = Q.CO.\ \sin BOC;$$

folglich:

$$\frac{BD\ \sin ODA}{CA\ \sin OAD} = \frac{BD.AO}{AC.DO} = \frac{P.BO}{Q.CO}.$$

Aufgabe 85. Vier gleiche, gleichförmig schwere Balken AB, BC, CD, DE sind in B, C, D durch Gewinde mit einander verbunden und in einer Vertikalebene im Gleichgewichte; man soll die Bedingungen des Gleichgewichtes finden, wenn die Entfernungen AE und CF gegeben sind, indem AE horizontal und CF vertikal ist. —



Auflösung. Es seien α, β resp. die Neigungen von AB oder ED und BC oder DC, so muß sein:

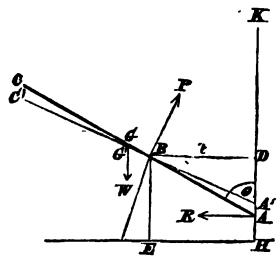
$$tang\,\alpha = 3\ tang\,\beta.$$

Ferner sei BK vertikal, $CF = a$, $AF = b$, $FK = x$ und $BK = y$; so ist:

$$x = \frac{a^2 + 2b^2 - \sqrt{(a^4 + a^2b^2 + b^4)}}{2b},$$

$$y = \frac{2a^2 + b^2 - \sqrt{(a^4 + a^2b^2 + b^4)}}{2a}.$$

Aufgabe 86. Ein in einer Vertikalebene liegender Balken AC stützt sich auf einen in derselben Ebene befindlichen Pfosten BE und gegen eine auf der ersten senkrechten Vertikalebene HK; man soll alle Umstände des Gleichgewichtes vermittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten finden. —



Auflösung. Es sei $BD = b$, $AG = a$, $\angle GAD = \Theta$, W das Gewicht des Balkens AC, G sein Schwerpunkt, P die auf AC normale Reaction in B und R die auf HK normale Reaction in A; so kann zu finden sein: 1) blos die Gleichgewichtslage, 2) oder auch P und nicht R, 3) oder auch R und nicht P, 4) die Gleichgewichtslage und auch P und R. —

1) Wenn es sich blos um die Gleichgewichtslage des Balkens AC handelt, so muß man demselben eine unendlich kleine Verrückung ertheilen; aber so, daß er mit dem Pfosten BE und der Ebene HK in Berührung bleibt, damit P und R nicht in der Gleichung der virtuellen Momente vorkommen (§. 59). Wenn h die Höhe von G über der Horizontale durch B bezeichnet, so ist:

$$h = GB\cos\Theta = (a - b\ \mathrm{cosec}\,\Theta)\cos\Theta = a\cos\Theta - b\,\mathrm{cotg}\,\Theta,$$

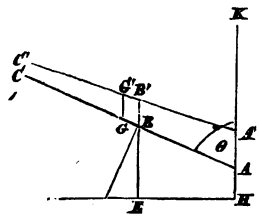
also:

$$dh = \left(\frac{b}{\sin^2\Theta} - a\sin\Theta\right) d\Theta,$$

und die Gleichung der virtuellen Momente $Wdh = o$ gibt:

$$b - a\sin^3\Theta = 0, \text{ folglich: } \sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

2) Will man auch P haben, aber R nicht, so muß der Balken bei der unendlich kleinen Verrückung von dem Pfosten EB entfernt werden, damit P in der Gleichung der virtuellen Momente vorkommt, aber R nicht, so daß der Balken mit der Vertikalebene HK in Berührung bleiben muß. — Alsdann ist, wenn $AA' = c$ gesetzt wird, der Weg von B, nach der Richtung von P geschätzt, die Differenz



der Projektionen von AA' und $A'B'$ auf die Richtung von P, d. h.

$= AA' \sin\Theta - A'B' (\cos 90^0 - d\Theta)$, $A'B' = AB = b \operatorname{cosec}\Theta$
$= c \sin\Theta - b \operatorname{cosec}\Theta \, d\Theta$,

und der von G beschriebene Weg in der Richtung von W:

$= AG \cos\Theta - AA' - A'G' \cos(\Theta + d\Theta)$
$= a \cos\Theta - c - a \cos\Theta + a \sin\Theta \, d\Theta = a \sin\Theta \, d\Theta - c.$

Die Gleichung der virtuellen Momente ist also:

$$W (a \sin\Theta \, d\Theta - c) + P (c \sin\Theta - b \operatorname{cosec}\Theta \, d\Theta),$$

oder:

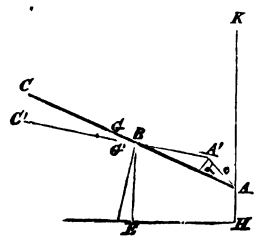
$$(W a \sin\Theta - P b \operatorname{cosec}\Theta) \, d\Theta - c (W - P \sin\Theta) = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen:

$$W a \sin\Theta - P b \operatorname{cosec}\Theta = 0,$$
$$W - P \sin\Theta = 0$$

zerfällt, weil $d\Theta$ und c zwei von einander unabhängige unendlich kleine Größen sind. — Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad \frac{P}{W} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$



3) Will man die Gleichgewichtslage und R, aber nicht P haben, so muß man dem Balken AC eine solche unendlich kleine Verrückung ertheilen, daß er mit dem Pfosten EB in Berührung bleibt, aber mit der Ebene HK nicht. — Setzt man wieder $AA' = c$ und $\angle BAA' = \alpha$, so ist:

$$d\Theta = \frac{c \sin\alpha}{AB - c \cos\alpha} = \frac{c}{b} \sin\alpha \sin\Theta,$$

und der Weg von G in der Richtung von W:

$= AG \cos\Theta - c. \cos(\Theta - \alpha) - A'G' \cos(\Theta + d\Theta)$

$= \left(\frac{b}{a} \sin^2\Theta - \sin\Theta\right) c. \sin\alpha - c \cos\alpha \cos\Theta;$

ferner der Weg von A in der Richtung von R:

$$= c.\ \sin(\Theta - \alpha).$$

Die Gleichung der virtuellen Momente ist also:

$$W\left[\left(\frac{a}{b}\sin^2\Theta - \sin\Theta\right) c\sin\alpha - c\cos\alpha\cos\Theta\right]$$
$$+ R\,(c.\cos\alpha\sin\Theta - c.\sin\alpha\cos\Theta) = 0,$$

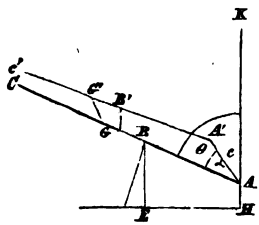
welche in die beiden Gleichungen zerfällt:

$$W\left[\frac{a}{b}\sin^2\Theta - \sin\Theta\right] - R\cos\Theta = 0,$$
$$W\cos\Theta - R\sin\Theta = 0,$$

woraus folgt:

$$\sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},\quad \frac{R}{W} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{b}}.$$

4) Wenn endlich sowohl die Gleichgewichtslage, als P und R gesucht wird, so darf der Balken AC bei seiner unendlich kleinen Verrückung weder mit dem Pfosten EB, noch mit der Vertikalebene HK in Berührung bleiben. — Alsdann sind die unendlich kleinen Wege von A, B und G nach den Richtungen von R, P und W resp.:



$$c\ \sin(\Theta - \alpha),$$
$$c.\ \sin\alpha - \frac{b\,d\Theta}{\sin\Theta},$$
$$a\sin\Theta d\Theta - c\cos(\Theta - d),$$

und folglich ist die Gleichung der virtuellen Momente:

$$W\left[a\sin\Theta.\,d\Theta - c.\cos(\Theta - \alpha)\right]$$
$$+ P\left(c.\sin\alpha - \frac{b\,d\Theta}{\sin\Theta}\right) + R\ c.\ \sin(\Theta - \alpha) = 0,$$

welche wegen der Unabhängigkeit von $c.\sin\alpha$, $c.\cos\alpha$ und $d\Theta$ in die drei Gleichungen:

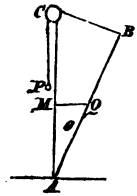
$$P - W\sin\Theta - R\cos\Theta = 0,$$
$$W\cos\Theta - R\sin\Theta = 0,$$
$$W\,a\sin\Theta - P\,b\,\mathrm{cosec}\,\Theta = 0$$

zerfällt, woraus sich durch Elimination ergibt:

$$\sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},\quad \frac{P}{W} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}},\quad \frac{R}{W} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Aus $\frac{dh}{d\Theta} = \frac{b}{\sin^2\Theta} - a.\sin\Theta$ und $\frac{d^2h}{d\Theta^2} = -\left(\frac{2b}{\sin^3\Theta} + a\right)\cos\Theta$ folgt ferner: daß h ein Maximum, und folglich das Gleichgewicht nicht stabil ist. —

Aufgabe 87. Ein gleichförmig schwerer Balken AB ist in einer Vertikalebene um ein Gewinde A beweglich, während an seinem obern Ende B ein Seil BCP befestigt ist, welches über einen in der Vertikale durch A befindlichen polirten Bolzen C geht und ein Gewicht P trägt, indem $AB = AC$ ist. Man soll die Gleichgewichtslage des Balkens AB durch das Princip der virtuellen Momente finden. —



Auflösung. Es sei W das Gewicht und $AB = a$ die Länge des Balkens, Q irgend ein Punkt desselben, QM senkrecht auf AC, $AQ = x$ und $\angle BAC = \Theta$; so ist der unendlich kleine Weg von P nach seiner eigenen Richtung bei einer unendlich kleinen Drehung des Balkens:

$$d.\,CP = d\,(BCP - BC) = d\,(BCP - 2a.\sin\frac{\Theta}{2})$$

$$= -\,d.\,2a\sin\frac{\Theta}{2} = -\,a.\cos\frac{\Theta}{2}\,d\Theta.$$

Das Gewicht eines Elementes dx des Balkens in Q ist $= \frac{dx}{a}\,W$ und sein unendlich kleiner Weg in vertikaler Richtung $= d.\,CM = d\,(a - x\cos\Theta) = x\sin\Theta\,d\Theta$; folglich die Summe der virtuellen Momente aller Elemente des Balkens:

$$= \Sigma\left(W\frac{dx}{a}\cdot x\sin\Theta\,d\Theta\right)$$

$$= \frac{W}{a}\cdot\sin\Theta\,d\Theta\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}\,W\sin\Theta\,d\Theta.$$

Die Gleichung der virtuellen Momente ist demnach:

$$\frac{1}{2} W a \sin\Theta d\Theta - P a \cos\frac{\Theta}{2} d\Theta = 0,$$

woraus folgt:

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{P}{W}.$$

Man kann sich das Gewicht W des Balkens auch in seinem Schwerpunkte, welcher Q sein mag, angebracht denken, und alsdann ist einfacher:

$$P.\, d.\, \overline{CP} + W.\, d.\, \overline{CM} = 0,$$

d. h.:

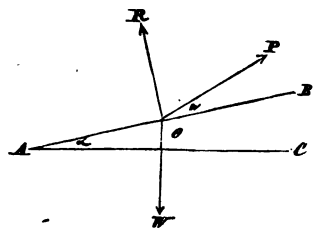
$$P\left(-a\cos\frac{\Theta}{2} d\Theta\right) + W d\left(a - \frac{a}{2}\cos\Theta\right) = 0,$$

oder:

$$-P a \cos\frac{\Theta}{2} d\Theta + W.\frac{a}{2}\sin\Theta d\Theta = 0,$$

wie vorhin. —

Aufgabe 88. Auf ein materielles Theilchen O, welches auf einer glatten geneigten Ebene AB liegt, wirkt nach einer gegebenen Richtung eine Kraft P und hält dasselbe im Gleichgewichte; man soll die Größe dieser Kraft, so wie den auf die Ebene ausgeübten Druck durch das Princip der virtuellen Momente finden.



Auflösung. Es sei W das Gewicht des materiellen Theilchens O, R der Widerstand der Ebene, $\angle POB = \omega$ und $\angle BAC = \alpha$. Wenn das materielle Theilchen O längs AB um eine unendlich kleine Länge β verrückt wird, so sind die virtuellen Momente von R, P und W resp.:

$$= 0, = P\beta\cos\omega \text{ und } = -W\beta\sin\alpha.$$

Die Gleichung der virtuellen Momente ist folglich:

$$P.\,\beta\cos\omega = W.\,\beta\sin\alpha \text{ oder } P\cos\omega = W\sin\alpha, \qquad (1)$$

wodurch der Werth von P bestimmt ist.

Wird O parallel zu AC um β verrückt, so sind die virtuellen Momente von W, P und R resp.:

$$= 0, = P\beta\cos(\alpha + \omega), = -R\beta\sin\alpha,$$

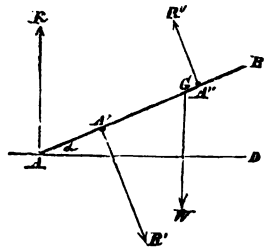
und mithin:

$$P\beta\cos(\alpha + \omega) = R\beta\sin\alpha,$$

folglich:

$$R = \frac{P\cos(\alpha + \omega)}{\sin\alpha} = \frac{W\cos(\alpha + \omega)}{\cos\omega},$$

Aufgabe 89. Ein glatter Balken AB liegt zwischen zwei auf derselben Vertikalebene senkrechten Bolzen A', A'' und stützt sich mit seinem untern Ende A auf eine glatte Horizontalebene AD; man soll den Druck R, R', R'' in A, A', A'' finden.

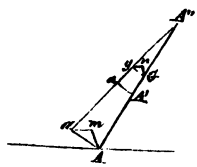


Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, woran sein Gewicht W angebracht sei, $AG = a$, $A'A'' = b$ und $\angle BAD = \alpha$. Wird der Balken, indem er mit A' und A'' in Berührung bleibt, um die unendlich kleine Größe β verrückt; so sind die virtuellen Momente von R und W offenbar einander gleich und entgegengesetzt, und man hat:

$$R\beta\sin\alpha - W\beta\sin\alpha = 0,$$

folglich:

$$R = W. \qquad (1)$$



Wird ferner der Balken unendlich wenig verrückt, indem er um A'' einen unendlich kleinen Winkel ω beschreibt, so daß die Punkte A', A'', G in die neuen Lagen a, a', g kommen; so ist nach dem Principe der virtuellen Momente, wenn Am, Gn vertikal und am, gn horizontal sind:

$$R.\,Am - R'.\,a'A' - W.\,Gn = 0,$$

also wegen (1):

$$W(Am - Gn) - R'.\,A'a' = 0. \qquad (2)$$

Es ist aber:

$$Am = Aa\cos\alpha = AA'.\,\omega.\,\cos\alpha,$$

und:

$$Gn = Gg\cos\alpha = A'G.\,\omega.\,\cos\alpha,$$

folglich:

$$Am - Gn = AG.\ \omega.\ \cos\alpha = a.\ \omega\ \cos\alpha,$$

und:

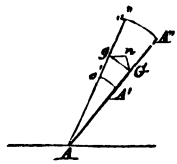
$$A'a' = AA''.\ \omega = b.\ \omega.$$

Substituirt man nun für $Am - Gn$ und $A'a'$ ihre Werthe in (2), so ergibt sich:

$$W.\ a.\ \omega\ \cos\alpha - b.\ \omega\ R' = 0,$$

folglich:

$$R' = \frac{W\ a\ \cos\alpha}{b}. \qquad (3)$$



Läßt man endlich den Balken um A einen unendlich kleinen Winkel beschreiben, so daß er in die Lage $Aa'\,ga''$ kommt; so ist nach dem Principe der virtuellen Momente:

$$R''.\ A''a'' - R'.\ A'a' - W.\ Gn = 0;$$

aber:

$$Gn = Gg\ \cos\alpha,$$

folglich:

$$R''.\ A''a'' - R'.\ A'a' - W.\ Gg\ \cos\alpha = 0,$$

Da sich aber $A''a''$, $A'a'$, Gg offenbar wie AA'', AA', AG verhalten, so ist:

$$R''.\ AA'' - R'.\ AA' - W.\ AG\ \cos\alpha = 0,$$

und wegen (3):

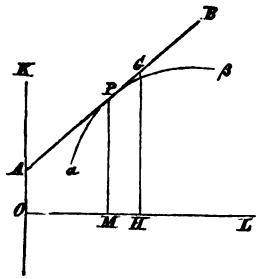
$$R''.\ AA' = W\left(\frac{a\ \cos\alpha}{b}\ AA' + AG\ \cos\alpha\right)$$

$$= W\ \frac{a\ \cos\alpha}{b}\ (AA' + b)$$

$$= W.\ \frac{a\ \cos\alpha}{b}.\ AA'';$$

folglich:

$$R'' = W.\ \frac{a\ \cos\alpha}{b} = R'.$$



Aufgabe 90. Ein Balken AB stützt sich gegen eine glatte vertikale Ebene OK und lehnt sich gegen eine ebenfalls glatte Curve $\alpha\beta$, indem die Ebene dieser Curve und des Balkens auf der Ebene OK senkrecht ist; von welcher Beschaffenheit muß die Curve $\alpha\beta$ sein, damit der Balken in jeder Lage im Gleichgewichte ist? —

Auflösung. Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, $OM = x$, $PM = y$, $AG = a$; so ist offenbar:

$$GH = y + PG.\frac{dy}{ds} = y + \left(a - x\frac{ds}{dx}\right)\frac{dy}{ds}$$
$$= y - x\frac{dy}{dx} + a\frac{dy}{ds}.$$

Da ferner das Gleichgewicht in jeder Lage des Balkens stattfinden soll, so muß GH eine constante Größe C sein (§. 68.); folglich, wenn man der Kürze wegen $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dp}{dx} = q$ setzt:

$$y - xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = C,$$

und wenn man nach x differenzirt:

$$-xq + \frac{aq}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} = 0;$$

also:

$$q = 0, \text{ oder } x = \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}.$$

Die erste dieser Auflösungen gibt eine gerade Linie, und die zweite gibt durch Integration:

$$y + \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^3} = C,$$

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten so wählt: daß $y = 0$ ist für $x = a$, in welchem Falle O der Durchschnittspunkt des Balkens in seiner horizontalen Lage mit OK ist; so ist $C = 0$, und folglich die Gleichung der gesuchten Curve:

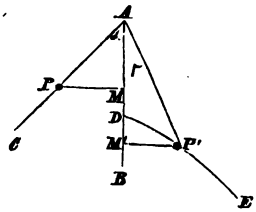
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Aufgabe 91. Auf einen materiellen Punkt O wirken drei Kräfte A, B, C, deren Richtungen durch drei Punkte A, B, C gehen; man soll mittelst des Principes der virtuellen Momente die Gleichgewichtsbedingungen finden. —

Auflösung. Die drei Punkte A, B, C müssen mit O in derselben Ebene liegen, und die relativen Größen der Kräfte A, B, C ergeben sich aus den Proportionen:

$$A : B = \sin BOC : \sin AOC,$$
$$A : C = \sin BOC : \sin AOB,$$
$$B : C = \sin AOC : \sin AOB.$$

Aufgabe 92. An einem über den festen Punkt A gehenden Faden von einer gegebenen Länge sind zwei Gewichte P, P' aufgehangen, wovon das eine P sich auf der geneigten Ebene AC bewegen kann; man soll die Curve DE finden, auf welcher das zweite Gewicht P' liegen muß, wenn P und P' in jeder Lage im Gleichgewichte sein sollen. —

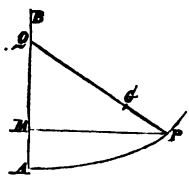


Auflösung. Es sei AB vertikal, $AP = \varrho$, $AP' = \varrho'$, $\varrho + \varrho' = l$, $AM = x$, $AM' = x'$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle BAP' = \varphi$ und m, m' die Massen von P, P'; so ist die Gleichung der gesuchten Curve:

$$(m \cos\varphi - m' \cos\alpha)\,\varrho = -\,c\,m'l \cos\alpha,$$

wo $c = mx + m'x'$ gesetzt ist. Die gesuchte Curve ist folglich ein Kegelschnitt. —

Aufgabe 93. Ein Balken PQ stützt sich gegen eine glatte vertikale Ebene AB und auf eine glatte Curve AP; von welcher Beschaffenheit muß diese Curve sein, wenn der Balken in jeder Lage im Gleichgewichte sein soll? —

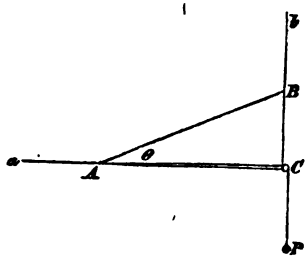


Auflösung. Es sei PM horizontal, G der Schwerpunkt des Balkens, $PQ = a$, $GP = c$, $AM = x$ und $PM = y$; so ist die Gleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{(c-x)^2}{c^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

welches die Gleichung einer Ellipſe iſt, deren Mittelpunkt in Q liegt, wenn PQ horizontal iſt. —

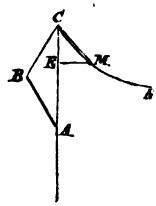
Aufgabe 94. Ein gleichförmig ſchwerer Balken AB ſtützt ſich auf eine horizontale Ebene aC und gegen eine vertikale Ebene bC; ein Seil ACP iſt an dem untern Ende A des Balkens befeſtigt, geht durch ein Loch C der Vertikalebene bC und trägt an ſeinem Ende ein Gewicht P. Man ſoll die Gleichgewichtslage des Balkens finden. —



Auflöſung. Es ſei W das Gewicht des Balkens und $\angle BAC = \Theta$, ſo iſt:

$$tang\,\Theta=\frac{W}{2P}.$$

Aufgabe 95. An dem Ende B des Balkens AB, welcher ſich um das untere Ende A frei drehen kann, iſt ein gewichtloſes Seil BCM befeſtigt, welches über den mit A in derſelben Vertikale liegenden Punkt C geht und an ſeinem Ende eine Maſſe M trägt, die auf einer in der Vertikalebene BAC liegenden glatten Curve CMN liegt; man ſoll die Gleichung der Curve CMN finden, welche ſo beſchaffen iſt, daß das Syſtem in jeder Lage im Gleichgewichte iſt. —

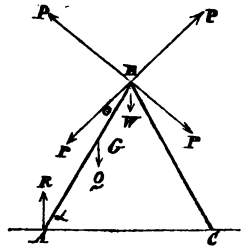


Auflöſung. Es ſei $AB = 2a$, $AC = b$, die Länge des Seiles $BCM = l$, die gerade Linie $CM = \varrho$, $\angle ACM = \Theta$ und M' die Maſſe des Balkens; ſo iſt die geſuchte Gleichung:

$$M'\varrho^2+2(2Mb\cos\Theta-M'l)\varrho=c,$$

wo c eine Conſtante iſt. —

Aufgabe 96. Zwei gleiche Balken AB, BC liegen in einer Vertikalebene, stützen sich mit ihren obern Enden, worauf ein Gewicht W wirkt, gegen einander und mit ihren untern Enden A, C sind sie durch Zapfen in den Balken AC eingelassen, so daß sie nicht ausgleiten können. Man soll die Spannung T des Balkens AC finden. —



Auflösung. Es sei Q das Gewicht und G der Schwerpunkt des Balkens AB, α seine Neigung gegen den Horizont, $AB = a$, $AG = b$; so wirken auf den Balken AB vier Kräfte, nämlich: die Reaction R in A, die Spannung T, das Gewicht Q und eine gewisse Kraft P, welche von dem Gewichte W und der Reaction des Balkens BC herrührt, und deren Richtung BP mit AB einen unbekannten Winkel Θ bildet. — Der Punkt B wird durch das Gewicht W und die beiden Reactionen P, P im Gleichgewichte gehalten. —

Für das Gleichgewicht des Balkens AB geben die horizontalen Componenten:

$$T - P\cos(\alpha - \Theta) = 0, \qquad (1)$$

die vertikalen Componenten:

$$R - Q - P\sin(\alpha - \Theta) = 0, \qquad (2)$$

und die Momente in Bezug auf den Punkt A:

$$Q\,b\cos\alpha - P\,a\sin\Theta = 0. \qquad (3)$$

Ferner hat man für das Gleichgewicht des Punktes B zwischen den vertikalen Componenten:

$$2P\sin(\alpha - \Theta) - W = 0. \qquad (4)$$

Wir haben also zwischen den 4 Unbekannten T, P, R, Θ auch 4 Gleichungen. Aus (1) und (4) ergibt sich durch Elimination von P:

$$T = \tfrac{1}{2}\,W\,\mathrm{cotg}(\alpha - \Theta),$$

und wenn man P zwischen (3) und (4) eliminirt:

$$Q\,b\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\,W\,a\,\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha - \Theta)} = \tfrac{1}{2}\,W\,a\,\frac{\sin[\alpha - (\alpha - \Theta)]}{\sin(\alpha - \Theta)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,W\,a\,[\sin\alpha\,\mathrm{cotg}(\alpha - \Theta) - \cos\alpha],$$

also:

$$cotg\,(\alpha - \Theta) = \frac{2\,Q\,b + W\,a}{W\,a}\,cotg\,\alpha,$$

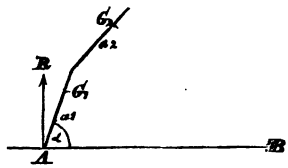
und mithin:

$$T = \frac{2\,Q\,b + W\,a}{2\,a}\,cotg\,\alpha.$$

Die Spannung T ist also desto kleiner, je größer α und je kleiner b gegen a ist. —

Aufgabe 97. Die Gleichgewichtsbedingungen eines Systemes von $2n$ Balken zu finden, welches auf dem Balken AB in einer Vertikalebene eine gegen die durch die höchste Spitze desselben gehende Vertikale eine symmetrische Gestalt hat. —

Auflösung. Es seien a_1, a_2, a_3, ... die Längen der Balken, Q_1, Q_2, Q_3, ... ihre Gewichte, G_1, G_2, G_3, ... ihre Schwerpunkte, b_1, b_2, b_3, ... die Entfernungen dieser Schwerpunkte von den untern Enden der Balken, α_1, α_2, α_3, ... die Neigungen der letztern gegen den Horizont, R die Reaction des horizontalen Balkens AB in A oder B, T die Spannung desselben, P_1, P_2, P_3, ... die gegenseitigen Reactionen der Balken in ihren Berührungspunkten, welche offenbar paarweise in derselben Richtung, aber nach entgegengesetztem Sinne erfolgen, und endlich Θ_1, Θ_2, Θ_3, ... die Winkel, welche diese Richtungen mit der Horizontale bilden; so hat man für das Gleichgewicht des ersten Balkens:



$$T + P_1 \cos\Theta_1 = 0, \qquad (1)$$
$$Q_1 - R + P_2 \sin\Theta_1 = 0, \qquad (2)$$
$$Q_1 b_1 \cos\alpha_1 - P_1 a_1 \sin(\alpha_1 - \Theta_1) = 0, \qquad (3)$$

für das des zweiten Balkens:

$$P_1 \cos\Theta_1 - P_2 \cos\Theta_2 = 0, \qquad (4)$$
$$Q_2 - P_1 \sin\Theta_1 + P_2 \sin\Theta_2 = 0, \qquad (5)$$
$$Q_2 b_2 \cos\alpha_2 - P_2 a_2 \sin(\alpha_2 - \Theta_2) = 0, \qquad (6)$$

und so fort bis zu dem höchsten Balken, für welchen $\Theta_n = 0$ sein muß. — Für das Gleichgewicht dieses höchsten Balkens hat man folglich:

$$P_{n-1}\cos\Theta_{n-1} - P_n = 0, \qquad (3n-2)$$
$$Q_n - P_{n-1}\sin\Theta_{n-1} = 0, \qquad (3n-1)$$
$$Q_n b_n \cos\alpha_n - P_n a_n \sin\alpha_n = 0, \qquad (3n)$$

und außerdem hat man die Relation:

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots\ldots a_n\cos\alpha_n = D, \qquad (3n+1)$$

wo $AB = 2D$ gesetzt ist. —

Eliminirt man nun aus diesen $3n+1$ Gleichungen die $2n+1$ Größen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n; \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_{n-1}$; R und T, so bleiben zur Bestimmung der n Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welche die Gleichgewichtslage des Balkensystemes bestimmen, noch n Gleichungen.

Wenn man die Gleichungen (2), (5), ... $(3n-1)$ addirt, so ergibt sich:

$$R = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots Q_n.$$

Eliminirt man P_1 zwischen (2) und (3), so ergibt sich:

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \Theta_1)}{\sin\Theta_1} = \frac{Q_1 b_1 \cos\alpha_1}{(R - Q_1)\, a_1},$$

also;

$$\sin\alpha_1 \operatorname{cotg}\Theta_1 = \left(1 + \frac{Q_1 b_2}{(R - Q_1)\, a_1}\right)\cos\alpha_1,$$

und:

$$\operatorname{cotg}\Theta_1 = \frac{(R - Q_1)\, a_1 + Q_1 b_1}{(R - Q_1)\, a_1}\operatorname{cotg}\alpha_1.$$

Folglich ist wegen (1) und (2):

$$T = (R - Q_1)\operatorname{cotg}\alpha_1$$
$$= \frac{(R - Q_1)\, a_1 + Q_1 b_1}{a_1}\operatorname{cotg}\alpha_1$$
$$= \left(Q_2 + \ldots\ldots + Q_n + Q_1\frac{b_1}{a_1}\right)\operatorname{cotg}\alpha_1.$$

Ferner ist:

$$(1) + (4) \ldots\ldots T - P_2\cos\Theta_2 = 0$$
$$(2) + (5) \ldots\ldots Q_1 + Q_2 - R + P_2\sin\Theta_2 = 0,$$

und wegen (6):

$$Q_2 b_2\cos\alpha_2 - P_2 a_2\sin(\alpha_2 - \Theta_2) = 0;$$

folglich:

$$T = (Q_3 + \ldots + Q_n + Q_2 \frac{b_2}{a_2}) \operatorname{cotg} \alpha_2.$$

Ebenso ergibt sich:

$$T = (Q_4 + \ldots + Q_n + Q_3 \frac{b_3}{a_3}) \operatorname{cotg} \alpha_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T = (Q_n \frac{b_n}{a_n}) \operatorname{cotg} \alpha_n.$$

Setzt man diese n Werthe von T einander gleich, so erhält man $n - 1$ Gleichungen zwischen den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welche in Verbindung mit $(3n + 1)$ diese Winkel bestimmen.

Auch ist:

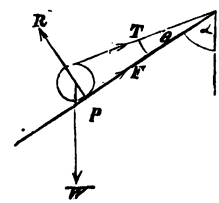
$$\operatorname{tang} \alpha_n = \frac{Q_{n+1} + \ldots + Q_n + Q_n \frac{b_n}{a_n}}{Q_n + \ldots + Q_n + Q_{n-1} \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}} \operatorname{tang} \alpha_{n-1}$$

Jeder der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ ist also größer als 90^0, oder jeder ist kleiner als 90^0, und aus der Gleichung $(3n + 1)$ folgt: daß letzteres der Fall ist, weil sonst D eine Summe negativer Größen wäre. —

Da ferner $\operatorname{tang} \alpha_n < \operatorname{tang} \alpha_{n-1}$ ist, so ist $\alpha_n < \alpha_{n-1}$, d. h.: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_n$. —

Aufgabe 98. Für einen Cylinder, dessen Axe horizontal und um dessen Mitte ein Seil gelegt ist, welches denselben auf einer geneigten Ebene im Gleichgewichte hält, indem das Seil am obern Ende der Ebene befestigt ist, sollen die Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden, wenn die Reibung F in Betracht gezogen wird.

Auflösung. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:



$$W - R\sin\alpha - F\cos\alpha - T\cos(\Theta + \alpha) = 0, \quad (1)$$
$$R\cos\alpha - F\sin\alpha - T\sin(\Theta + \alpha) = 0, \quad (2)$$
$$T.a - F.a = 0, \quad (3)$$

wo a den Halbmesser des Cylinders bezeichnet.

Durch Elimination von T zwischen (2) und (3), ergibt sich:

$$\frac{F}{R} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \sin(\Theta + \alpha)},$$

und da F nicht $> \mu R$ sein kann, so kann:

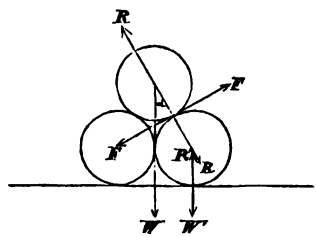
$$\sin\alpha + \sin(\Theta + \alpha) \text{ nicht} < \frac{\cos\alpha}{\mu},$$

folglich:

$$\Theta + \alpha \text{ nicht} < \arcsin\left(\frac{\cos\alpha - \mu\sin\mu}{\mu}\right),$$

wohl aber größer sein. —

Aufgabe 99. Zwei gleiche Cylinder liegen auf einer Horizontalebene so, daß sie sich der Länge nach berühren, indem ihre Axen parallel sind, und auf denselben liegt ein dritter Cylinder, indem seine Axe zu denen der beiden andern parallel ist. Man soll die Gleichgewichtsbedingungen, so wie die Relation zwischen μ, μ' finden, wenn alle Berührungspunkte zugleich fortgleiten, wo μ, μ' resp. die Reibungscoefficienten zwischen zwei Cylindern oder einem Cylinder und der Ebene bezeichnen. —



Auflösung. Für den obern Cylinder hat man nur die eine Gleichgewichtsbedingung:

$$W - 2R\cos\alpha - 2F\sin\alpha = 0, \quad (1)$$

weil die beiden andern Identitäten sind. —

Für einen der untern Cylinder hat man aber:

$$W' - R' + R\cos\alpha + F\sin\alpha = 0, \quad (2)$$
$$F' - R\sin\alpha + F\cos\alpha = 0, \quad (3)$$
$$F' - F = 0. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \text{ nicht} > \mu,$$

aus (1) und (2):

$$2R' = 2W' + W,$$

und aus (1), (3), (4):

$$F' = \frac{W \sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} = \frac{W}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2};$$

also:

$$\frac{F'}{R'} = \frac{W \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{2W' + W} \text{ nicht} > \mu'$$

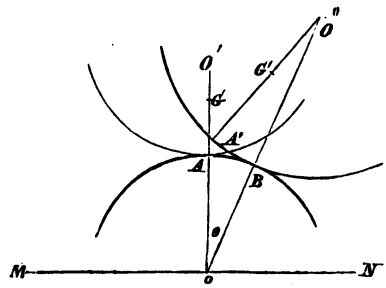
Da $W < W + 2W'$ ist, so werden die Berührungspunkte der untern Cylinder zuerst fortgleiten, wenn $\mu = \mu'$ ist und W allmälig größer wird. — Sollen alle Berührungspunkte zu gleicher Zeit fortgleiten, so muß sein:

$$\operatorname{tang}\alpha = \mu \text{ und } \frac{W \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{2W' + W} = \mu';$$

also:

$$\frac{W'}{W} = \frac{\mu - \mu'}{2\mu'}.$$

Aufgabe 100. Ein Körper mit einer convexen Oberfläche ruhet auf einem andern mit einer solchen Oberfläche; man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht stabil, labil, oder neutral (indifferent) ist (§. 68).



Auflösung. Es sei CAO die Normale der beiden einander berührenden Flächen in dem Berührungspunkte A, wenn der obere Körper in Ruhe ist, so liegt sein Schwerpunkt G in dieser Linie. Ferner seien O, O' die Krümmungsmittelpunkte der Durchschnittscurven beider Oberflächen

mit einer durch OO' gelegten Ebene für den Punkt A, $AO = \varrho$, $AO' = \varrho'$, $O'G = l$ und $OG = h$ die Höhe des Schwerpunktes G über der Horizontale MON; so ist, wenn der obere Körper um den sehr kleinen Winkel Θ verrückt wird:

$$h = (\varrho + \varrho')\cos\Theta - l\cos(\Theta + AO''B),\ AO''B = \frac{A'B}{\varrho'} = \frac{\varrho\Theta}{\varrho'}$$

$$= (\varrho + \varrho')\cos\Theta - l\cos(1 + \frac{\varrho}{\varrho'}\Theta) =$$

$$(\varrho + \varrho')(1 - \frac{l}{\varrho'}) - [(\varrho + \varrho') - \frac{l}{\varrho'^2}(\varrho + \varrho')^2]\frac{\Theta^2}{2}.$$

Es ist mithin h ein Maximum, oder ein Minimum, jenachdem:

$$l \lessgtr \frac{\varrho'^2}{\varrho + \varrho'}$$

oder:

$$AG \gtrless \varrho' - l \text{ oder } AG \gtrless \frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}$$ ist.

Das Gleichgewicht ist folglich stabil, nicht stabil, oder neutral, jenachdem

$$AG \lessgtr \frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}$$

ist (68). —

Wenn die Oberfläche des untern Körpers concav wäre, so müßte man ϱ negativ nehmen. —

Wäre diese Fläche eine Ebene, so müßte man $\varrho = \infty$ setzen, und alsdann ist:

$$\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} = \frac{\varrho'}{1 + \frac{\varrho'}{\varrho}} = \varrho$$

so daß das Gleichgewicht stabil, nicht stabil, oder indifferent ist, jenachdem:

$$AG \lessgtr \varrho'$$

ist. —

Wenn die untere Fläche des obern Körpers eine Ebene ist, so muß man $\varrho' = \infty$ setzen, und alsdann ergibt sich ebenso, daß das Gleichgewicht stabil, nicht stabil, oder neutral ist, jenachdem

$$AG \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} \varrho$$

ist. —

Aufgabe 101. An welchem Punkte eines senkrechten Pfeilers muß ein Seil von gegebener Länge befestigt werden, um denselben mit der kleinsten Zugkraft nieder zu ziehen? —

Aufgabe 102. An einem festen Punkte *A* ist mittelst eines Fadens ein Gewicht *P* aufgehangen, und an *P* ist ein Faden *PBW* befestigt, welcher über eine feste Rolle *B* so geht, daß *BP* horizontal ist und an seinem andern Ende ein Gewicht *W* trägt; wie weit wird *AP* durch *W* von der vertikalen Richtung entfernt? —

Aufgabe 103. Ein schwerer Kreisbogen *ACDB* geht zwischen zwei glatten Bolzen *C*, *D* hindurch, man soll seine Gleichgewichtslage finden. —

Aufgabe 104. Zwei Körper halten sich auf zwei schiefen Ebenen von gleicher Höhe, aber verschiedenen Längen das Gleichgewicht; man soll das Verhältniß ihrer Gewichte finden. —

Aufgabe 105. Ein Kegel steht mit seiner Grundfläche auf einer geneigten Ebene, und der Reibungscoefficient zwischen beiden Ebenen ist gegeben; man soll bestimmen, ob der Kegel umschlagen, oder herabgleiten wird, wenn der Neigungswinkel der schiefen Ebenen allmälig vergrößert wird? —

Aufgabe 106. Ein schwerer Balken stützt sich mit seinem untern und obern Ende resp. gegen eine glatte horizontale und eine geneigte Ebene; welche Kraft muß an dem untern Ende des Balkens wirken, damit er nicht fortgleitet? —

Aufgabe 107. Zwei schwere materielle Punkte sind durch eine gewichtslose starre gerade Linie verbunden und werden in eine hohle Halbkugel gelegt; man soll ihre Gleichgewichtslage, so wie den auf sie ausgeübten Druck finden. —

Aufgabe 108. Ein schwerer Balken *AB* ist um ein Gewinde *A* in einer Vertikalebene beweglich und stützt sich mit dem andern Ende gegen eine glatte Vertikalebene; man soll den Druck auf das Gewinde und auf die Ebene finden. —

Aufgabe 109. Ein Balken von gegebener Länge und gegebenem Gewichte stützt sich mit dem einen Ende auf eine horizontale und mit dem andern gegen eine vertikale Ebene; man soll die Kraft fin-

den, welche erforderlich ist, um den Balken in Ruhe zu erhalten, so wie den Druck auf jede Ebene. —

Aufgabe 110. An zwei in derselben Horizontale liegenden festen Punkten A, B sind zwei Fäden AC, BCW befestigt, wovon der erste in C einen Ring trägt, durch welchen der zweite geht, an dessen Ende ein Gewicht W hängt; man soll die Gleichgewichtslage des Ringes finden. —

Aufgabe 111. Eine gleichförmig schwere Stange geht durch ein Loch in einer Vertikalebene und stützt sich auf eine geneigte Ebene; man soll ihre Gleichgewichtslage finden. —

Aufgabe 112. Drei gleichförmig dicke und schwere Balken AB, BC, CD von den resp. Längen l, $2l$, l sind in B und C durch Gewinde mit einander verbunden und ruhen auf einer vollkommen polirten Kugel von dem Halbmesser $2l$, so daß die Mitte E von BC und die Enden A, D mit ihr in Berührung sind; man soll zeigen: daß

$$\frac{R}{W} = \frac{3}{40} \text{ und } \frac{R'}{W} = \frac{91}{100}$$

ist, wo W das Gesammtgewicht der 3 Balken, R den Druck in A oder D und R' den in E auf die Kugel bedeutet. —

Aufgabe 113. Zwei in einer Vertikalebene befindliche Balken AC, BDC stützen sich mit ihren obern Enden gegen einander, während ihre untern Enden auf einer glatten Horizontalebene stehen, indem ihr Fortgleiten durch ein Seil AD verhindert wird, welches in A und einem Punkte D von BC befestigt ist. Man soll die Spannung dieses Seiles finden.

Aufgabe 114. Ein Cylinder stützt sich mit seiner Grundfläche gegen eine vertikale Ebene und wird in dieser Lage durch ein Seil gehalten, welches an einem um die Länge h von der Vertikalebene entfernten Punkte der krummen Oberfläche desselben befestigt ist; man soll zeigen, daß $h > b - 2a\,tang\,\Theta$ und $h < b$ sein muß, wo $2b$ die Höhe, a den Halbmesser und Θ den Winkel bezeichnet, welchen das Seil mit der Vertikale bildet. —

Aufgabe 115. Ein flaches quadratisches Brett ruhet in einer Vertikalebene auf zwei Bolzen; man soll die Gleichgewichtslage desselben finden, wenn die Reibung nicht in Betracht gezogen wird und die gegenseitige Entfernung der Bolzen der halben Seite des Quadrates gleich ist. —

Aufgabe 116. Man soll die Gleichgewichtslage einer gleichförmig schweren Stange finden, welche sich mit dem obern Ende gegen eine vertikale Ebene und mit dem untern gegen die innere Fläche einer hohlen Halbkugel stützt. —

Aufgabe 117. Drei gleiche Stangen stehen auf den Winkelspitzen eines gleichseitigen Dreieckes in einer rauhen Horizontalebene und stützen sich mit ihren obern Enden blos gegen einander, worauf ein schwerer Ring über dieselben gelegt wird, welcher eben bewirkt, daß die Stangen zusammen stürzen; man soll die Coefficienten der Reibung der Stangen unter sich und mit der Ebene finden. —

Aufgabe 118. Ein schwerer Körper liegt auf einer rauhen horizontalen Ebene, man soll die Größe und Richtung der kleinsten Kraft finden, welche denselben in Bewegung versetzen kann. —

Aufgabe 119. Die Resultante und die Summe zweier Kräfte ist gegeben, so wie der Winkel, welchen eine derselben mit der Resultante macht; man soll diese Kräfte, so wie den Winkel, welchen ihre Richtungen mit einander bilden, finden. —

Aufgabe 120. Eine Leiter steht auf einer horizontalen und lehnt sich gegen eine vertikale Ebene; es ist die Länge derselben, der Ort ihres Schwerpunktes, so wie der Reibungscoefficient für beide Ebenen gegeben, und man soll die Grenzgleichgewichtslage derselben finden. —

Aufgabe 121. Ein schweres Dreieck *ABC* wird von drei gegebenen Gewichten getragen, welche an Fäden hängen, die an den Punkten *A*, *B*, *C* befestigt sind und durch einen der Lage nach gegebenen Ring *D* gehen; man soll die Längen *AD*, *BD*, *CD*, so wie die Winkel, welche sie mit der Vertikale bilden, finden. — ist, wo Θ, φ resp. die Neigungen gegen den Horizont bezeichnen. —

Aufgabe 122. Ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Ebene vertikal ist, kann sich um eine durch seinen Schwerpunkt gehende horizontale Axe drehen, an den Endpunkten der Basis sind zwei gleiche Gewichte und an der Spitze ist ein kleineres Gewicht aufgehangen; man soll die Gleichgewichtslagebestimmen und zugleich angeben, ob das Gleichgewicht stabil, labil, oder indifferent ist. —

Aufgabe 123. Eine gleichförmig schwere Stange wird in eine rauhe hohle Halbkugel gelegt; man soll die Grenzgleichgewichtslagen der Stange finden. —

Aufgabe 124. Ein rechtwinkliges Dreieck ruhet in horizontaler Lage auf 3 Stützen unter den 3 Winkelspitzen, wovon jede noch ein Gewicht von 1 Pfund tragen kann. Man soll den Theil der Fläche des Dreieckes bestimmen, in welchen ein Gewicht von weniger als 3 Pfund gestellt werden kann, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. —

Aufgabe 125. Wenn für 3 auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte P, Q, R die Summe der virtuellen Momente (§. 59.)

$$P.p + Q.q + R.r \text{ stets} = 0$$

ist, nach welcher Richtung die virtuelle Bewegung desselben auch angenommen werden mag, zu beweisen: daß sich P, Q, R wie die Seiten eines Dreieckes verhalten, welche zu den Richtungen von P, Q, R parallel sind. —

Aufgabe 126. Ein materieller Punkt wird von 4 in verschiedenen Ebenen liegenden Kräften im Gleichgewichte gehalten; man soll ihre Größe bestimmen, wenn ihre Richtungen gegeben sind.

Aufgabe 127. Wenn mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3, ... in verschiedenen Ebenen auf denselben materiellen Punkt wirken und mit ihrer Resultante R die Winkel α_1, α_2, α_3, ... bilden; so ist:

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots.$$

ein Maximum, was zu beweisen ist. —

Aufgabe 128. Auf zwei geneigten Ebenen CD, CE halten zwei Körper, deren Schwerpunkte A, B durch einen über C gehenden Faden verbunden sind, einander das Gleichgewicht. Wenn man nun durch die Punkte A, B, C einen Kreis beschreibt, so bleiben die beiden Körper auch im Gleichgewichte, wenn man den Faden über irgend einen andern Punkt dieses Kreises gehen läßt, was bewiesen werden soll. —

Aufgabe 129. Ein schwerer Kegel ruhet auf seiner Spitze, indem seine Axe einen Winkel α mit dem Horizonte bildet, welche Größe und Richtung muß die kleinste Kraft haben, welche am Mittelpunkte der Grundfläche angebracht, den Kegel in dieser Lage erhält? —

Aufgabe 130. Ein Kegel ruhet auf der Kante seiner Basis, indem seine Axe einen Winkel von α^0 mit der Horizontale bildet; man soll die Richtung und Größe der kleinsten an der Spitze des

Kegels angebrachten Kraft, welche denselben in dieser Lage erhalten kann, bestimmen. —

Aufgabe 131. Ein kegelförmiger Balken stützt sich mit seiner Spitze gegen eine vertikale Ebene, während an seiner Basis ein Seil befestigt ist, welches über eine feste Rolle geht und ein gegebenes Gewicht trägt. Man soll die Gleichgewichtslage des Balkens finden, so wie den Druck gegen die Ebene bestimmen. —

Aufgabe 132. Auf einer horizontalen Ebene steht ein senkrechter Pfahl von a Fuß Länge und trägt das dickere Ende eines abgestumpften Kegels von gegebener Größe und Substanz, während sich das dünnere Ende des letztern auf die Ebene stützt. Man soll bestimmen, wie sich der Druck auf den Pfahl bei dieser Lage des Kegels gegen den Druck verhält, welcher auf den Pfahl ausgeübt wird, wenn die Axe des Kegels horizontal ist. —

Aufgabe 133. Ein abgestumpfter Kegel von gegebenen Dimensionen liegt mit dem dünnern Ende auf einem senkrechten Pfahle von gegebener Länge; welche Neigung muß die Axe des Kegels gegen den Horizont haben, damit der Druck auf den Pfahl $\frac{1}{n}$ des Gewichtes des Kegels beträgt? —

Aufgabe 134. Zwei gleiche Balken AC, BD können sich in derselben Vertikalebene um die in derselben Horizontale liegenden Punkte A, B drehen, während ihre obern Enden C, D durch ein Seil verbunden sind, welches über eine in derselben Vertikalebene liegende feste Rolle geht. Man soll die Gleichgewichtslage der Balken finden. —

Aufgabe 135. Ein Viertelkreis von gegebenem Gewichte und Halbmesser kann sich um seinen festen Mittelpunkt in derselben Vertikalebene drehen; an dem einen Ende des Kreisbogens ist eine Schnur befestigt, welche über eine der Lage nach gegebene Rolle geht und an ihrem andern Ende ein Gewicht trägt, welches den entsprechenden Halbmesser des Quadranten horizontal hält; man soll das Verhältniß dieses Gewichtes zu dem des Quadranten finden. —

Aufgabe 136. Ein Seil von gegebener Länge ist an den Endpunkten der Axe eines Kegels von gegebener Größe und Gewicht befestigt und geht über einen glatten festen Bolzen; man soll die Gleichgewichtslage des Kegels, so wie die Spannung des Seiles finden. —

Aufgabe 169. Den Schwerpunkt eines Bogens der Schraubenlinie

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = na.\ arc\cos\frac{x}{a}$$

zu finden.

Auflösung. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{na}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

folglich:

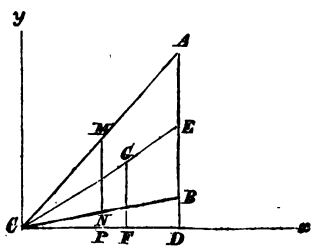
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx = a\sqrt{1 + n^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{arc\cos\frac{x}{a}},$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^x dx}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{a - x}{arc\cos\frac{x}{a}},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_a^x na.\ arc\cos\frac{x}{a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{na}{2} \cdot arc\cos\frac{x}{a}.$$



Aufgabe 170. Den Schwerpunkt G eines Dreieckes ABC zu finden. —

Auflösung. Zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche F hat man die allgemeinen Formeln:

$$F = \iint dx\,dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{F}, \quad \bar{y} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{F}$$
$$= \int y\,dx, \quad = \frac{\int y\,x\,dx}{F}, \quad = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{F}, \qquad (\alpha)$$

die Integrale zwiſchen den gehörigen Grenzen genommen. —

Oder wenn X den auf der Axe der x ſenkrechten Durchſchnitt der Fläche F und y' die Ordinate ſeines Schwer- oder Mittelpunktes bezeichnet, die Formeln:

$$F = \int X\,dx, \quad \bar{x} = \frac{\int x\,X\,dx}{F}, \quad \bar{y} = \frac{\int y'\,X\,dx}{F}, \qquad (\beta)$$

wo y' und X durch x ausgedrückt und die Integrale in Bezug auf x zwiſchen den gehörigen Grenzen genommen werden müſſen.

Wendet man die Formeln (β) auf das Dreieck ABC an, indem man $AB = b$, $CD = h$ und $MN = X$ ſetzt; ſo iſt:

$$X : x = b : h,$$

folglich:

$$X = \frac{b\,x}{h},$$

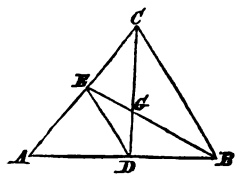
und:

$$F = \int_0^h \frac{b\,x}{h}\,dx, \quad \bar{x} = \frac{\int_0^h \frac{b}{h}\,x^2\,dx}{\frac{1}{2}\,bh} = \frac{2}{3}\,h$$
$$= \frac{1}{2}\,bh, \qquad = CF = \frac{2}{3}\,CD;$$

folglich auch $CG = \frac{2}{3}\,CE$, wo E offenbar die Mitte von AB iſt. —

Wie lautet alſo der hierin liegende Satz? —

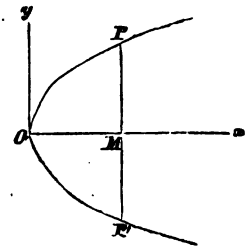
Derſelbe ergibt ſich auch ohne Integralrechnung. Denn denkt man ſich das Dreieck ABC parallel zu der Seite AB in unendlich ſchmale Elemente zerlegt, ſo liegt der Schwerpunkt eines jeden in ſeiner Mitte, und folglich der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes in der Linie CD, welche die Seite AB halbirt. — Denkt man ſich ebenſo das Dreieck ABC parallel zu der Seite AC zerlegt, ſo ergibt ſich: daß ſein Schwerpunkt in der Halbirungslinie BE der Seite AC liegt. Folglich muß derſelbe im Durchſchnittspunkte G von CD und BE



liegen. Da nun $AD = \frac{1}{2}AB$ und $AE = \frac{1}{2}AC$ ist, so ist $DE \parallel BC$; folglich $DE = \frac{1}{2}BC$; also auch $DG = \frac{1}{2}CG$, mithin $CG = \frac{2}{3}CD$, oder $BG = \frac{2}{3}BE$, weil $DEG \sim BCG$ ist. —

Daß $CG = \frac{2}{3}CD$ oder $BG = \frac{2}{3}BE$ ist, erhellet auch ohne die Aehnlichkeit der Dreiecke, wenn man sich in den drei Winkelspitzen A, B, C des Dreieckes drei gleiche Gewichte $W_1 = W_2 = W_3$ angebracht denkt. Denn der Schwerpunkt von W_1 und W_2 liegt alsdann in D; also der von W_1, W_2 und W_3 in der Linie CD. Ebenso ergibt sich: daß er in der Linie BE liegt; folglich muß er im Durchschnittspunkte G dieser beiden Linien liegen. Der Schwerpunkt der drei gleichen Gewichte fällt also mit dem des Dreieckes ABC zusammen. Für die Lage des erstern ist aber offenbar $CG = \frac{2}{3}CD$ und $BG = \frac{2}{3}BE$.

Der Schwerpunkt eines beliebigen Vieleckes ergibt sich hiernach ebenfalls sehr leicht. —



Aufgabe 171. Den Schwerpunkt einer Parabelfläche OPM zu finden. —

Auflösung. Die Gleichung der Parabel sei:

$$y^2 = 2px,$$

so ist:

$$F = \int y\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\,x\sqrt{2px},$$
$$\int y\,x\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{2}{5}\,x^2\sqrt{2px},$$

und:

$$\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx = p\int x\,dx = \tfrac{1}{2}\,px^2.$$

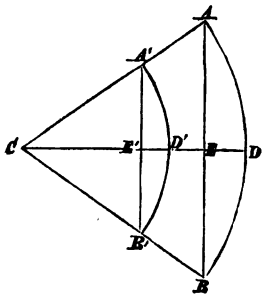
Es ist demnach:

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{5}\,x^2\sqrt{2px}}{\frac{2}{3}\,x\sqrt{2px}} = \tfrac{3}{5}\,x = \tfrac{3}{5}\,MO,$$
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\,px^2}{\frac{2}{3}\,x\sqrt{2px}} = \tfrac{3}{8}\sqrt{2px} = \tfrac{3}{8}\,y = \tfrac{3}{8}\,MP.$$

Für die Fläche POP' ist offenbar:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{5}\,x, \quad \bar{y} = 0.$$

Aufgabe 172. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes *ABC* und eines Kreisabschnittes *ABDE* zu finden. —



Auflösung 1. Man kann sich den Ausschnitt *ABC* als aus unendlich vielen Dreiecken bestehend denken, deren Spitzen in *C* liegen und deren Grundlinien die Elemente des Bogens *AB* sind — und wenn man sich die Massen dieser Dreiecke in ihren Schwerpunkten, welche nach Aufgabe 167 in dem mit $CA' = \frac{2}{3} CA$ beschriebenen Bogen *A'D'B'* liegen, concentrirt denkt; so ist klar: daß der Schwerpunkt des Ausschnittes *ABC* mit dem des Bogens *A'D'B'* zusammenfällt. — Bezeichnen also a, l, c resp. wieder den Halbmesser *AC*, den Bogen *ADB* und seine Sehne *AB*, so sind die analogen Größen für den Ausschnitt *CA'B'* offenbar $\frac{2}{3} a$, $\frac{2}{3} l$, $\frac{2}{3} c$, und folglich (Aufg. 160):

$$\bar{x} = \frac{2ac}{3l}.$$

Bezeichnen ferner F, F', F_1 die Flächen des Ausschnittes *ABC*, des Dreieckes *ABC* und des Abschnittes *ADBE* und $\bar{x}$, $\bar{x'}$, $\bar{x}_1$ die Abscissen ihrer Schwerpunkte, worin man sich den Flächen F, F', F_1 proportionale Gewichte angebracht denken muß; so ist:

$$F.\bar{x} = F'.\bar{x'} + F_1 \bar{x}_1. \qquad (\alpha)$$

Ferner ist:

$$F = \tfrac{1}{2} al, \quad \bar{x} = \frac{2ac}{3l},$$

und:

$$F' = \tfrac{1}{2} ch, \quad \bar{x'} = \tfrac{2}{3} h,$$

wenn man $CE = h$ und $AB = c$ setzt; also:

$$F_1 = F - F' = \tfrac{1}{2}(al - ch).$$

Die Momentengleichung (α) wird folglich:

$$\tfrac{1}{3} a^2 c = \tfrac{1}{3} ch^2 + \tfrac{1}{2}(al - ch)\,\bar{x}_1,$$

woraus folgt:

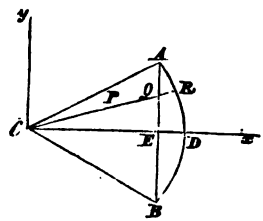
$$\bar{x}_1 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a^2 c - c^3 h}{al - ch}$$

$$= \frac{4a^2 \sin^3 \frac{l}{2a}}{3\left(l - a \sin \frac{l}{a}\right)},$$

wegen $c = 2a \sin \frac{l}{2a}$, $h = a \cos \frac{l}{2a}$. —

Wenn der Bogen l ein Halbkreis wird, so ist $l = \pi a$, der Aus- und Abschnitt fallen zusammen, und man hat:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 = \frac{4a}{3\pi}.$$



Auflösung 2. Es sei $\angle ACx = \alpha$, so ist die Gleichung der geraden Linie CA offenbar:

$$y = tang\,\alpha \,.\, x,$$

und die des Kreisbogens ADB:

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Ferner ist $CE = a \cos \alpha$, folglich:

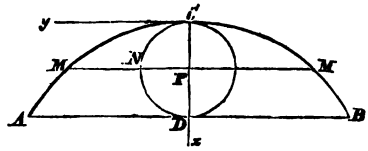
$$\int_0^a x\,y\,dx = tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x^2\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a x\sqrt{a^2 - x^2}.\,dx,$$

und:

$$\int_0^a y\,dx = tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a \sqrt{a^2 - x^2}.\,dx.$$

Nun ist aber:

$$tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha,$$



Auflösung. Die Gleichung der Cycloide in Beziehung auf die rechtwinkligen Axen Cx, Cy ist bekanntlich:

$$y = a.\ arc\,sin\,vers\,\frac{x}{a} + \sqrt{2ax - x^2},$$

wo a den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet. Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht:

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}\,dx,$$

$$ds = \sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx,\quad s = 2\sqrt{2ax}.$$

Mithin ist:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{\int x\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx}{2a\sqrt{2ax}} = \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{2ax}}{2\sqrt{2ax}} = \frac{1}{3}x;$$

und:

$$\bar{y} = \frac{\int y\,ds}{s} = \frac{\int y\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx}{2\sqrt{2ax}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}.\,y - \int \sqrt{x}\sqrt{\frac{2a - x}{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$$

$$= y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2a - x)^{\frac{3}{2}} - (2a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Nimmt man die Integrale zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = 2a$, so erhält man für die Coordinaten des Schwerpunktes des halben Cycloidenbogens AC:

$$\bar{x} = \frac{2a}{3},\quad \bar{y} = \pi a - \frac{4a}{3},$$

und für einen in Beziehung auf den Punkt C symmetrischen Bogen MCM' ist:

$$\bar{x} = \frac{1}{3}x.$$

Aufgabe 165. Den Schwerpunkt eines vom Scheitel aus gezählten Parabelbogens zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel sei:

$$y^2 = 2px,$$

so ist:

$$y\,dy = p\,dx, \text{ also } ds = \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}\,dx,$$

und:

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2px + x^2} + \tfrac{1}{2}\,p\,\mathring{log}\left(\frac{2x + \sqrt{2px + x^2}}{p}\right).$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
\int x\,ds &= \int x\sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}\,dx = \int\sqrt{\frac{px + 2x^2}{2}}\,dx \,\Big|\, \frac{p}{2} = 2a\Big| \\
&= \int\sqrt{2ax + x^2}.\,dx = \int\sqrt{(a + x)^2 - a^2}.\,dx \,|z = x + a| \\
&= \int\sqrt{z^2 - a^2}.\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{z^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}\,a^2\,\mathring{log}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + C \\
&= \tfrac{1}{2}\,(x + \tfrac{1}{4}\,p)\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}\,px} \\
&\qquad - \frac{p}{32}\,\mathring{log}\,(x + \tfrac{1}{4}\,p + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}\,px}) + C,
\end{aligned}$$

wo die Constante C so bestimmt werden muß, daß das Integral mit x zugleich verschwindet, also $C = \frac{p}{32}\,\mathring{log}\,\frac{p}{4}$ ist:

Endlich hat man:

$$\begin{aligned}
\int y\,ds &= \int y\sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}.\,dx = \int\sqrt{2px}.\sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}\,dx \\
&= \sqrt{p}\int\sqrt{p + 2x}.\,dx = -\tfrac{1}{3}\sqrt{p}\,(p + 2x)^{\frac{3}{2}} + C,
\end{aligned}$$

wo $C = \frac{1}{3}\,p$ ist, weil das Integral mit x zugleich verschwinden muß. —

Nach dem Vorhergehenden lassen sich nun

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{s},\quad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{s}$$

leicht angeben. —

Aufgabe 166. Den Schwerpunkt der Sinusoide:

$$y = \sin x, \qquad (\alpha)$$

von $x = 0$ bis $x = \pi$ zu finden.

Auflösung. Aus (α) folgt:

$$ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx,$$

mithin ist:

$$\bar{y} = \frac{\int y\, ds}{s} = \frac{\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx}{\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx}$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)$$

und:

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 x}\, dx$$

eine elliptische Function von dem Modulus $\cos \frac{1}{2} \pi$.

Aufgabe 167. Den Schwerpunkt eines Bogens s der Kettenlinie:

$$x = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right)$$

zu finden. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{2} x + \frac{cy}{2s}, \quad \bar{y} = y - \frac{cx}{s}.$$

Aufgabe 168. Den Schwerpunkt einer Schleife der Joh. Bernullischen Lemniscate:

$$r^2 = a^2 \cos 2\Theta$$

zu finden:

Auflösung. Wenn die Axe der Schleife zur Axe der x und der Knoten zum Anfangspunkte genommen wird; so findet man:

$$\bar{x} = \frac{a^2}{\sqrt{2}.\, l}, \quad \bar{y} = \frac{(\sqrt{2} - 1)\, a^2}{\sqrt{2}.\, l},$$

wo a die Länge der Axe und l die des halben Schleifenbogens bezeichnet. —

Aufgabe 169. Den Schwerpunkt eines Bogens der Schraubenlinie

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = na.\ arc\cos\frac{x}{a}$$

zu finden.

Auflösung. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{na}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

folglich:

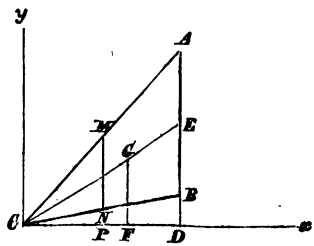
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx = a\sqrt{1 + n^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{arc\cos\frac{x}{a}},$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^x dx}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{a - x}{arc\cos\frac{x}{a}},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_a^x na.\ arc\cos\frac{x}{a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{na}{2} \cdot arc\cos\frac{x}{a}.$$



Aufgabe 170. Den Schwerpunkt G eines Dreieckes ABC zu finden. —

Auflösung. Zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche F hat man die allgemeinen Formeln:

$$F = \iint dx\,dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{F}, \quad \bar{y} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{F}$$
$$= \int y\,dx, \quad = \frac{\int y\,x\,dx}{F}, \quad = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{F}, \qquad (\alpha)$$

die Integrale zwiſchen den gehörigen Grenzen genommen. —

Oder wenn X den auf der Axe der x ſenkrechten Durchſchnitt der Fläche F und y' die Ordinate ſeines Schwer- oder Mittelpunktes bezeichnet, die Formeln:

$$F = \int X\,dx, \quad \bar{x} = \frac{\int x\,X\,dx}{F}, \quad \bar{y} = \frac{\int y'\,X\,dx}{F}, \qquad (\beta)$$

wo y' und X durch x ausgedrückt und die Integrale in Bezug auf x zwiſchen den gehörigen Grenzen genommen werden müſſen.

Wendet man die Formeln (β) auf das Dreieck ABC an, indem man $AB = b$, $CD = h$ und $MN = X$ ſetzt; ſo iſt:

$$X : x = b : h,$$

folglich:

$$X = \frac{b\,x}{h},$$

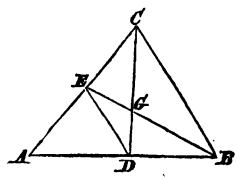
und:

$$F = \int_0^h \frac{b\,x}{h}\,dx, \quad \bar{x} = \frac{\int_0^h \frac{b}{h}\,x^2\,dx}{\frac{1}{2}\,bh} = \frac{2}{3}\,h$$
$$= \frac{1}{2}\,bh, \qquad = CF = \frac{2}{3}\,CD;$$

folglich auch $CG = \frac{2}{3}\,CE$, wo E offenbar die Mitte von AB iſt. —

Wie lautet alſo der hierin liegende Satz? —

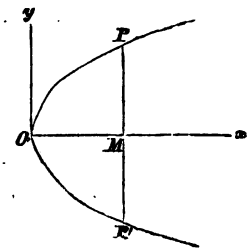
Derſelbe ergibt ſich auch ohne Integralrechnung. Denn denkt man ſich das Dreieck ABC parallel zu der Seite AB in unendlich ſchmale Elemente zerlegt, ſo liegt der Schwerpunkt eines jeden in ſeiner Mitte, und folglich der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes in der Linie CD, welche die Seite AB halbirt. — Denkt man ſich ebenſo das Dreieck ABC parallel zu der Seite AC zerlegt, ſo ergibt ſich: daß ſein Schwerpunkt in der Halbirungslinie BE der Seite AC liegt. Folglich muß derſelbe im Durchſchnittspunkte G von CD und BE



liegen. Da nun $AD = \frac{1}{2}AB$ und $AE = \frac{1}{2}AC$ ist, so ist $DE \parallel BC$; folglich $DE = \frac{1}{2}BC$; also auch $DG = \frac{1}{2}CG$, mithin $CG = \frac{2}{3}CD$, oder $BG = \frac{2}{3}BE$, weil $DEG \sim BCG$ ist. —

Daß $CG = \frac{2}{3}CD$ oder $BG = \frac{2}{3}BE$ ist, erhellet auch ohne die Aehnlichkeit der Dreiecke, wenn man sich in den drei Winkelspitzen A, B, C des Dreieckes drei gleiche Gewichte $W_1 = W_2 = W_3$ angebracht denkt. Denn der Schwerpunkt von W_1 und W_2 liegt alsdann in D; also der von W_1, W_2 und W_3 in der Linie CD. Ebenso ergibt sich: daß er in der Linie BE liegt; folglich muß er im Durchschnittspunkte G dieser beiden Linien liegen. Der Schwerpunkt der drei gleichen Gewichte fällt also mit dem des Dreieckes ABC zusammen. Für die Lage des erstern ist aber offenbar $CG = \frac{2}{3}CD$ und $BG = \frac{2}{3}BE$.

Der Schwerpunkt eines beliebigen Vieleckes ergibt sich hiernach ebenfalls sehr leicht. —



Aufgabe 171. Den Schwerpunkt einer Parabelfläche OPM zu finden. —

Auflösung. Die Gleichung der Parabel sei:

$$y^2 = 2px,$$

so ist:

$$F = \int y\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\,x\sqrt{2px},$$

$$\int y\,x\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{2}{5}\,x^2\sqrt{2px},$$

und:

$$\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx = p\int x\,dx = \tfrac{1}{2}\,px^2.$$

Es ist demnach:

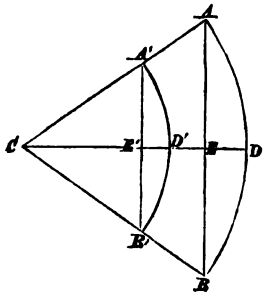
$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{5}\,x^2\sqrt{2px}}{\frac{2}{3}\,x\sqrt{2px}} = \tfrac{3}{5}\,x = \tfrac{3}{5}\,MO,$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\,px^2}{\frac{2}{3}\,x\sqrt{2px}} = \tfrac{3}{8}\sqrt{2px} = \tfrac{3}{8}\,y = \tfrac{3}{8}\,MP.$$

Für die Fläche POP' ist offenbar:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{5}\,x, \quad \bar{y} = 0.$$

Aufgabe 172. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes *ABC* und eines Kreisabschnittes *ABDE* zu finden. —



Auflösung 1. Man kann sich den Ausschnitt *ABC* als aus unendlich vielen Dreiecken bestehend denken, deren Spitzen in *C* liegen und deren Grundlinien die Elemente des Bogens *AB* sind — und wenn man sich die Massen dieser Dreiecke in ihren Schwerpunkten, welche nach Aufgabe 167 in dem mit $CA' = \frac{2}{3} CA$ beschriebenen Bogen *A'D'B'* liegen, concentrirt denkt; so ist klar: daß der Schwerpunkt des Ausschnittes *ABC* mit dem des Bogens *A'D'B'* zusammenfällt. — Bezeichnen also a, l, c resp. wieder den Halbmesser *AC*, den Bogen *ADB* und seine Sehne *AB*, so sind die analogen Größen für den Ausschnitt *CA'B'* offenbar $\frac{2}{3} a$, $\frac{2}{3} l$, $\frac{2}{3} c$, und folglich (Aufg. 160):

$$\bar{x} = \frac{2ac}{3l}.$$

Bezeichnen ferner F, F', F_1 die Flächen des Ausschnittes *ABC*, des Dreieckes *ABC* und des Abschnittes *ADBE* und $\bar{x}$, $\bar{x'}$, $\bar{x}_1$ die Abscissen ihrer Schwerpunkte, worin man sich den Flächen F, F', F_1 proportionale Gewichte angebracht denken muß; so ist:

$$F.\bar{x} = F'.\bar{x'} + F_1.\bar{x}_1. \qquad (\alpha)$$

Ferner ist:

$$F = \tfrac{1}{2} al, \quad \bar{x} = \frac{2ac}{3l},$$

und:

$$F' = \tfrac{1}{2} ch, \quad \bar{x'} = \tfrac{2}{3} h,$$

wenn man $CE = h$ und $AB = c$ setzt; also:

$$F_1 = F - F' = \tfrac{1}{2}(al - ch).$$

Die Momentengleichung (α) wird folglich:

$$\tfrac{1}{3} a^2 c = \tfrac{1}{3} ch^2 + \tfrac{1}{2}(al - ch)\,\bar{x}_1,$$

woraus folgt:

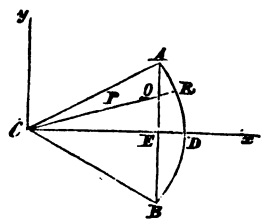
$$\bar{x}_1 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a^2 c - c^2 h}{al - ch}$$

$$= \frac{4a^2 \sin^3 \frac{l}{2a}}{3\left(l - a \sin \frac{l}{a}\right)},$$

wegen $c = 2a \sin \frac{l}{2a}$, $h = a \cos \frac{l}{2a}$. —

Wenn der Bogen l ein Halbkreis wird, so ist $l = \pi a$, der Aus- und Abschnitt fallen zusammen, und man hat:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 = \frac{4a}{3\pi}.$$



Auflösung 2. Es sei $\angle ACx = \alpha$, so ist die Gleichung der geraden Linie CA offenbar:

$$y = tang\,\alpha \,.\, x,$$

und die des Kreisbogens ADB:

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Ferner ist $CE = a \cos\alpha$, folglich:

$$\int_0^a x\,y\,dx = tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x^2\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a x\sqrt{a^2 - x^2}.\,dx,$$

und:

$$\int_0^a y\,dx = tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a \sqrt{a^2 - x^2}.\,dx.$$

Nun ist aber:

$$tang\,\alpha \int_0^{a\cos\alpha} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha,$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}};$$ folglich:

$$\int_{a\cos\alpha}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}.\,dx = \tfrac{1}{3}a^3\sin^3\alpha;$$ alſo:

$$\int_0^a xy\,dx = \tfrac{1}{3}a^3\sin\alpha.$$

Ferner iſt:

$$\operatorname{tang}\alpha\int_0^{a\cos\alpha} x\,dx = \tfrac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\int_{a\cos\alpha}^{a}\sqrt{a^2-x^2}.\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}\right]_{a\cos\alpha}^{a}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}a^2\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha);$$

folglich:

$$\int_0^a y\,dx = \tfrac{1}{2}a^2\alpha,$$

und endlich:

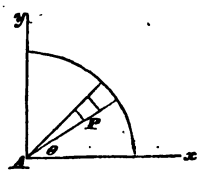
$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{3}a^3\sin\alpha}{\frac{1}{2}a^2\alpha} = \tfrac{2}{3}a.\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für den Schwerpunkt des Abſchnittes ADB hat man offenbar:

$$\bar{x}_1 = \frac{\frac{1}{3}a^3\sin^3\alpha}{\frac{1}{2}a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$= \tfrac{2}{3}a.\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Auflöſung 3. Man kann oft auch Polarcoordinaten mit Vortheil anwenden, zu welchem Zwecke man $r\cos\Theta$ für x, $r\sin\Theta$ für y und $r\,dr\,\Theta$ für $dx\,dy$ ſetzen muß, wenn der Radius-vector $AP = r$ und $\angle xAP = \Theta$ geſetzt wird. — Denn die Seiten des Flächenelementes bei P ſind offenbar dr und $r\,d\Theta$; folglich ſein Ausdruck $r\,dr\,d\Theta$. Die allgemeinen Ausdrücke für $\bar{x}$, $\bar{y}$ ſind daher wegen $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ in Polarcoordinaten:



$$\bar{x} = \frac{\iint r^2 \cos\Theta \, dr \, d\Theta}{\iint r \, dr \, d\Theta}, \quad \bar{y} = \frac{\iint r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta}{\iint r \, dr \, d\Theta},$$

zwischen den gehörigen Grenzen genommen. —

Wendet man diese allgemeinen Ausdrücke auf den Kreisausschnitt ABC (Fig. auf S. 179) an, indem man $AP = r$ und $\angle PCx = \Theta$ setzt; so hat man:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{o}^{a} r^2 \cos\Theta \, dr \, d\Theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{o}^{a} r \, d\Theta \, dr}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} a^3 \int_{-o}^{+\alpha} \cos\Theta \, d\Theta}{\frac{1}{2} a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\Theta} = \frac{2}{3} a . \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Oder wenn man die doppelte Integration in umgekehrter Reihenfolge verrichtet:

$$\bar{x} = \frac{\int_{o}^{a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos\Theta \, dr \, d\Theta}{\int_{o}^{a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \, dr \, d\Theta} = \frac{2 \sin\alpha \int_{o}^{a} r^2 \, dr}{2a \int_{o}^{a} r \, dr}$$

$$= \frac{2 \sin\alpha . \frac{1}{3} a^3}{2a . \frac{1}{2} a^2} = \frac{2}{3} a . \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für den Kreisabschnitt ADB hat man, wenn $CQ = r' = a \frac{\cos\alpha}{\cos\Theta}$ gesetzt wird:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{r'}^{a} r^2 \cos\Theta \, dr \, d\Theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{r'}^{a} r \, dr \, d\Theta}.$$

Nun ist aber:

$$\int_{r'}^{a} r^2 \cos\Theta \, d\Theta \, dr = \tfrac{1}{3}(a^3 - r'^3) \cos\Theta \, d\Theta$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 \left(1 - \frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\Theta}\right) \cos\Theta \, d\Theta;$$

folglich:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{r'}^{a} r^2 \cos\Theta \, d\Theta \, dr$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\cos\Theta - \frac{\cos^3\alpha}{\cos^2\Theta} (d\Theta$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 \left[\sin\Theta - \cos^3\alpha \, tang\Theta\right]_{\Theta=-\alpha}^{\Theta=+\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 (\sin\alpha - \cos^2\alpha \sin\alpha)$$

$$= \tfrac{2}{3} a^3 \sin^3\alpha.$$

Ferner iſt:

$$\int_{r'}^{a} r \, d\Theta \, dr = \tfrac{1}{2}(a^2 - r'^2) \, d\Theta$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\Theta}\right) d\Theta;$$

folglich:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{r'}^{a} r \, d\Theta \, dr$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \left[\Theta - \cos^2\alpha \, tang\Theta\right]_{\Theta=-\alpha}^{\Theta=+\alpha}$$

$$= a^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha),$$

und endlich:

$$\bar{x}_1 = \tfrac{2}{3} a. \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}.$$

Auflöſung 4. Man kann auch zuerſt den Werth von $\bar{x}_1$ ſuchen, indem man die Gleichung:

$$y^2 = 2ax - x^2$$

des auf den Endpunkt eines Durchmeſſers bezogenen Kreiſes zu Grunde legt. Alsdann iſt:

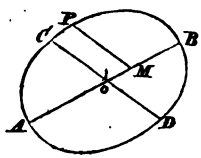
$$\bar{x}_1 = \frac{\int_0^x x\sqrt{2ax - x^2}.\,dx}{\int_0^x \sqrt{2ax - x^2}.\,dx} = \frac{\int_0^x \frac{2ax^2 - x^3}{\sqrt{2ax - x^2}}\,dx}{\int_0^x \frac{2ax - x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}\,dx},$$

welche Integrale sich leicht nach der bekannten Formel:

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{2ax - x^2}}{n} + \frac{2n - 1}{n} a \int_0^x \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

finden lassen. —

Aufgabe 173. Den Schwerpunkt eines beliebigen Stückes *OCPM* der Fläche einer Ellipse zu finden. —



Auflösung. Wenn man die beiden conjugirten Durchmesser *AB*, *CD* zu den Axen und den Mittelpunkt *O* zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt; so ist die Gleichung der Ellipse:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

wo $OA = OB = a$ und $OC = OD = b$ gesetzt ist; folglich:

$$\int xy\,dx = \frac{b}{a}\int x\sqrt{a^2 - x^2}.\,dx = -\tfrac{1}{3}\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)^3},$$

$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}.\,dx = \frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,arc\sin\frac{x}{a}\right],$$

$$\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int (a^2 - x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3),$$

wo keine Constanten hinzuzufügen sind, weil die Integrale mit x zugleich verschwinden müssen. —

Es ist also:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3} \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}}$$

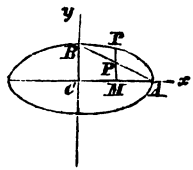
$$\bar{y} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3}{\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}}.$$

Für den Schwerpunkt der Fläche OCB ergibt sich hieraus:

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{4b}{3\pi},$$

und für den von CBD:

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = 0.$$



Aufgabe 174. Den Schwerpunkt der Fläche $ApBP$ zu finden, welche durch die Sehne AB des elliptischen Quadranten abgeschnitten wird. —

Auflösung. Es sei $CA = a$, $CB = b$, $CM = x$, $PM = y$, $pM = y'$; so ist die Gleichung der Ellipse und der Sehne ApB resp.:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y' = \frac{b}{a}(a - x).$$

Ferner ist:

$$\int_0^a \int_{y'}^{y} x \, dx \, dy = \int_0^a (y - y') \, x \, dx$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^a [\sqrt{a^2 - x^2} - (a - x)] \, x \, dx$$

$$= \frac{b}{a} \left[-\tfrac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} - \tfrac{1}{2} a x^2 - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \tfrac{1}{6} a^2 b$$

und:

$$\int_0^a \int_{y'}^{y} dx \, dy = \int_0^a (y - y') \, dx$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^a [\sqrt{a^2 - x^2} - (a - x)] \, dx$$

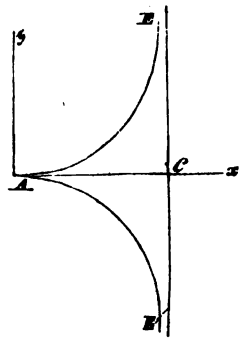
$$= \frac{b}{a} (\tfrac{1}{4} \pi a^2 - \tfrac{1}{2} a^2) = \tfrac{1}{2} (\pi - 2) \, ab;$$

folglich:

$$\bar{x} = \tfrac{2}{3}, \frac{a}{\pi - 2}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\bar{y} = \tfrac{2}{3} \frac{b}{\pi - 2}.$$



Aufgabe 175. Den Schwerpunkt der Fläche der Cissoide EAE' zu finden.

Auflösung. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$y^2 = \frac{x}{a - x},$$

wo $AC = a$ gesetzt ist. Es ist also:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, y\, dx}{\int y\, dx} = \frac{\int_0^a \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{a-x}}\, dx}{\int_0^a \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a-x}}\, dx};$$

aber:

$$\int \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{a-x}}\, dx = -2\sqrt{x^5\,(a-x)} + 5\int \sqrt{x^3\,(a-x)}\, dx;$$

folglich:

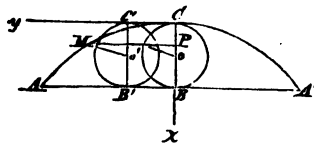
$$\int_0^a \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{a-x}}\, dx = 5\int_0^a \sqrt{x^3\,(a-x)}\, dx$$

$$= 5a\int_0^a \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a-x}}\, dx - 5\int_0^a \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{a-x}}\, dx$$

$$= \tfrac{5}{6}\, a. \int_0^a \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a-x}},$$

und endlich:

$$\bar{x} = \tfrac{5}{6}\, a.$$



Aufgabe 176. Den Schwerpunkt einer cyloidiſchen Fläche *CPM* zu finden.

Auflöſung. Es ſei $O'M = a$, $CP = x$ und $MP = y$, $\angle\, C'O'M = \varphi$; ſo ſind die Gleichungen der Cycloide:

$$x = a\,(1 - \cos\varphi), \quad y = a\,(\varphi + \sin\varphi);$$

folglich:

$$F = \int y\,dx = xy - \int x\,dy = xy - a^2 \int \sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$= xy - \tfrac{1}{2}\,a^2\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\,\varphi).$$

Ferner iſt:

$$\int y\,x\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2y - \tfrac{1}{2}\int x^2\,dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\,x^2y - \tfrac{1}{2}\,a^3 \int (1 - \cos\varphi)\,\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\,x^2y - \tfrac{1}{2}\,a^3\,[\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 2\,\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi],$$
$$\tfrac{1}{2}\int y^2dx = \tfrac{1}{2}\,y^2x - \int y\,x\,dy;$$

aber:

$$\int y\,x\,dy = a^3 \int (\varphi + \sin\varphi)\,\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$= a^3 \int \varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi + a^3 \int \sin^3\varphi\,d\varphi,$$

und:

$$\int \varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\,\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\,\sin\varphi\,(\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi),$$
$$\int \sin^3\varphi\,d\varphi = 1 - \cos\varphi - \tfrac{1}{3}\,(1 - \cos^3\varphi).$$

Setzt man nun für die Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die $\sin.$ und $\cos.$ der Vielfachen von φ, ſo ergibt ſich:

$$\int x\,y\,dy$$
$$= a^3\,[\tfrac{1}{4}\,\varphi\,(\varphi - \sin 2\varphi) + \tfrac{19}{24} - \tfrac{3}{4}\cos\varphi - \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{12}\cos 3\varphi].$$

Nach den vorhergehenden Ausdrücken laſſen ſich nun die von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ leicht bilden.

Für die halbe Cycloidenfläche *ACB* iſt:

$$\varphi = \pi, \quad x = 2a, \quad y = a\pi, \quad F = \tfrac{3}{2}\,a^2\pi;$$

folglich:

$$\bar{x} = \tfrac{7}{6}a, \quad \bar{y} = (1 - \frac{16}{9\pi^2})\,\frac{a\pi}{2}$$

und für die ganze Fläche ACA ist:

$$\bar{x} = \tfrac{7}{6}a, \quad \bar{y} = 0.$$

Aufgabe 177. Den Schwerpunkt der Fläche zu finden, welche von dem Bogen einer halbkubischen Parabel:

$$ay^2 = x^3$$

und der doppelten Ordinate derselben eingeschlossen wird. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \tfrac{5}{7}\,x.$$

Aufgabe 178. Den Schwerpunkt der von der Curve:

$$y^2 = b^2 . \frac{a - x}{x}$$

eingeschlossenen Fläche zu finden. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{4}\,a.$$

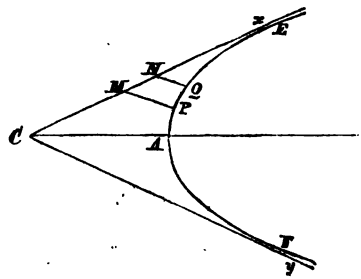
Aufgabe 179. Den Schwerpunkt der Fläche einer Schleife der Lemniscate:

$$r^2 = a^2 \cos^2\Theta$$

zu finden. —

Auflösung. Es ist:

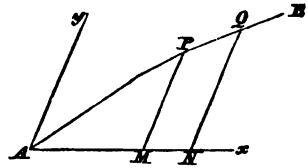
$$\bar{x} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} \cdot a.$$



Aufgabe 180. Den Schwerpunkt der Fläche $PMNQ$ zu finden, wenn EAF eine Hyperbel ist, deren Asymptoten Cx, Cy die Coordinatenaxen sind.

Auflösung. Es seien a, b die halben Axen der Hyperbel, $CM = a'$ und $CN = a''$; so ist:

$$\bar{x} = \frac{a'' - a'}{\log a'' - \log a'}, \quad \bar{y} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a'a''} \cdot \frac{a'' - a'}{\log a'' - \log a'}.$$



Aufgabe 181. Den Schwerpunkt der Fläche *PMNQ* zu finden, wenn *AB* eine Parabel ist, welche durch die Gleichung:

$$a^{n-1} y = x^n$$

ausgedrückt wird. —

Auflösung. Es sei $AM = a'$, $AN = a''$, so ist:

$$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{a''^{n+2} - a'^{n+2}}{a''^{n+2} - a'^{n+2}},$$

$$\bar{y} = \frac{n+1}{2(2n+1)\, a'^{n-1}} \cdot \frac{a''^{2n+1} - a'^{2n+1}}{a''^{n+1} - a'^{n+1}}.$$

Aufgabe 182. Den Schwerpunkt der Fläche der Sinusoide:

$$y = \sin x$$

von $x = 0$ bis $x = \pi$ zu finden. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \bar{y} = \tfrac{1}{8}\pi.$$

Aufgabe 183. Den Schwerpunkt der Fläche zu finden, welche zwischen der geraden Linie $y = \beta x$ und der Parabel $y^2 = 2px$ liegt. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \frac{4p}{5\beta^2}, \quad \bar{y} = \frac{p}{\beta}.$$

Aufgabe 184. Den Schwerpunkt der Fläche zu finden, welche von einer durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ gehenden und gegen die Axe unter dem Winkel Θ geneigten Sehne abgeschnitten wird. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \frac{p}{10}(3 + 8\, cotg^2\Theta), \quad \bar{y} = p\, cotg\,\Theta.$$

Aufgabe 185. Den Schwerpunkt der Oberfläche einer Kugelzone zu finden.

Auflösung. Die Kugeloberfläche kann als durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden gedacht werden. Für das Element dA einer beliebigen Rotationsfläche hat man aber bekanntlich:

$$dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

wenn die Rotationsaxe zur Axe der x genommen wird. —

Folglich ist:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{\int x\, y\, ds}{\int y\, ds} = \frac{\int x y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}.$$

Nun sei die Gleichung des erzeugenden Halbkreises:

$$y = \sqrt{2ax - x^2},$$

so ist:

$$dy = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} dx;$$

folglich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2}{2ax - x^2} dx^2 = \frac{a^2 dx^2}{y^2};$$

also:

$$y\, ds = a\, dx,$$

und mithin:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, y\, ds}{\int y\, ds} = \frac{\int ax\, dx}{\int a dx} = \frac{\frac{1}{2} x^2}{x} = \frac{1}{2} x.$$

Aufgabe 186. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines geraden Kegels zu finden. —

Auflösung. Es sei h die Höhe und r der Halbmesser der Grundfläche des Kegels; so ist die Gleichung der seine Oberfläche erzeugenden geraden Linie:

$$y = \frac{r}{h} x,$$

folglich:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx,$$

und:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, y\, ds}{\int y\, ds} = \frac{\int x^2\, dx}{\int x\, dx} = \frac{\frac{1}{3} x^3}{\frac{1}{2} x^2} = \frac{2}{3} x = \frac{2}{3} h.$$

Aufgabe 187. Den Schwerpunkt der von einem cycloidischen Bogen *CM* (Fig. auf S. 172.) um die Axe *Cx* erzeugten Oberfläche zu finden. —

Auflösung. Nach Aufg. 164 ist:

$$dy = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},\ \text{folglich}\ ds = \sqrt{\frac{2a}{x}}\, dx.$$

Man hat daher:

$$\int y\, ds = \int y \sqrt{\frac{2a}{x}}\, dx = \sqrt{2a} \int y \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\int y \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{x}\, dy$$

$$= 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{x}. \sqrt{\frac{2a - x}{x}}\, dx$$

$$= 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{2a - x}.\, dx$$

$$= 2y\sqrt{x} + \tfrac{4}{3}(2a - x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{3}(2a)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int x\, y\, ds = \int y\, x \sqrt{\frac{2a}{x}}\, dx = \sqrt{2a} \int y \sqrt{x}\, dx,$$

$$\int y \sqrt{x}\, dx = \tfrac{2}{3} y\, x \sqrt{x} - \tfrac{2}{3} \int x \sqrt{x}\, dy$$

$$= \tfrac{2}{3} y\, x \sqrt{x} - \tfrac{2}{3} \int x \sqrt{x} \sqrt{\frac{2a - x}{x}}\, dx$$

$$\tfrac{2}{3} y\, x \sqrt{x} - \tfrac{2}{3} \int x \sqrt{2a - x}.\, dx,$$

$$\int x \sqrt{2a - x}\, dx = -\tfrac{2}{3} x (2a - x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} \int (2a - x)^{\frac{3}{2}}\, dx,$$

$$\int (2a - x)^{\frac{3}{2}}\, dx = -\tfrac{2}{5} (2a - x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{5} (2a)^{\frac{5}{2}},$$

weil sämmtliche Integrale mit x zugleich verschwinden müssen. —

Es ist also:

$$\int x\, y\, ds = \tfrac{2}{3} \sqrt{2a}\, y\, x \sqrt{x} - \tfrac{4}{15} \sqrt{2a}\, x (2a - x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{8}{15} \sqrt{2a} (2a - x)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{8}{15} (2a)^3$$

und:

$$\int y\,ds = 2\sqrt{2a}\,y\sqrt{x} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2a}\,(2a-x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{8}{3}(2a)^2,$$

wonach sich der Ausdruck für:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,y\,ds}{\int y\,ds}$$

leicht bilden läßt. —

Wenn der erzeugende Bogen CM der halben Cycloide CA gleich wird, so ist $x = 2a$ und $y = \pi a$; folglich:

$$\bar{x} = \tfrac{2}{3}\,a.\,\frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}}.$$

Wenn sich der Cycloidenbogen CM um die Axe Cy drehet, so ist

$$\bar{y} = \frac{\int x\,y\,ds}{\int x\,ds}.$$

Nun ist aber:

$$\int x\,ds = \int x\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx = \int \sqrt{2ax}\,dx = \sqrt{2a}\int \sqrt{x}\,dx$$
$$= \tfrac{2}{3}\,x\,\sqrt{2ax},$$

so daß also der Werth von $\bar{y}$ bekannt ist, weil der Werth von $\int x\,y\,ds$ offenbar derselbe bleibt, wie vorhin. —

Wenn der Bogen CM der halben Cycloide CA gleich wird, so ist:

$$\bar{y} = a\,(\pi - \tfrac{8}{15}).$$

Aufgabe 188. Den Schwerpunkt der durch eine Schleife der Lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\Theta$ erzeugten Oberfläche zu finden. —

Auflösung. Man findet:

$$\bar{x} = \frac{a}{6}\cdot\frac{1 - \sqrt{\cos^3 2\Theta}}{1 - \cos\Theta}.$$

Aufgabe 189. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines Rotationsparaboloides zu finden. —

Auflösung. Die Entfernung dieses Schwerpunktes von der Richtlinie ist gleich:

$$\frac{3p}{10} \cdot \frac{sec^5 \frac{\Theta}{2} - 1}{sec^3 \frac{\Theta}{2} - 1}.$$

Aufgabe 190. Den Schwerpunkt eines Stückes der Oberfläche des Kegels:

$$y^2 + z^2 = \beta^2 x^2,$$

welches zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ liegt, zu finden. —

Auflösung. Es ist $\bar{x} = \frac{3}{8} a$, $\bar{y} = \bar{z} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\beta a}{\pi}$.

Aufgabe 191. Den Schwerpunkt des achten Theiles der Kugeloberfläche zu finden. —

Auflösung. Aus der Gleichung der Kugeloberfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

folgt:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

und mithin ist:

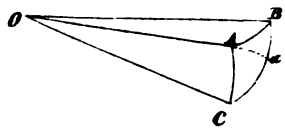
$$\bar{x} = \frac{\iint x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx\, dy}$$

$$= \frac{\int_0^a \int_0^{y'} \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}}{\int_0^a \int_0^{y'} \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}}, \text{ wo } y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{\int_0^a \frac{\pi}{2} x\, dx}{\int_0^a \frac{\pi}{2}\, dx} = \frac{a}{2}.$$

Ebenso findet man:

$$\bar{y} = \bar{z} = \frac{a}{2}.$$



Aufgabe 192. Den Schwerpunkt eines sphärischen Dreieckes *ABC* zu finden. —

Auflösung. Es ist allgemein für eine beliebige Oberfläche:

$$\bar{x} = \frac{\iint x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy},$$

$$\bar{z} = \frac{\iint z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy},$$

und wenn

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugeloberfläche ist; so ist:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{r}{z};$$

folglich:

$$\bar{z} = r. \frac{\iint dx\, dy}{\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dx}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist offenbar die Fläche des betrachteten Stückes der Kugeloberfläche, und der Zähler ist die Fläche der Projektion dieses Stückes auf die Ebene der xy, so daß also allgemein der Abstand des Schwerpunktes eines beliebigen Stückes der Kugeloberfläche von der Ebene eines größten Kreises die vierte Proportionale zwischen der Fläche dieses Stückes, der seiner Projektion auf diese Ebene und dem Halbmesser der Kugel ist. —

Bezeichnen nun Z_a, Z_b, Z_c resp. die Abstände des Schwerpunktes des sphärischen Dreieckes ABC von den Ebenen BOC, AOC, AOB, F die Fläche des Dreieckes und F' die seiner Projektion auf die Ebene BOC; so ist nach dem vorhin Gesagten:

$$Z_a = \frac{F'}{F}\, r,$$

und bekanntlich:

$$F = \frac{\pi r^2}{180}\,(A + B + C - 180^\circ).$$

Bezeichnen ferner a, b, c die den Winkeln A, B, C des Dreieckes ABC resp. gegenüber liegenden Seiten desselben; so ist:

$$F' = \text{Fläche } BOC - \text{Fläche } AOB.\cos B - \text{Fläche } AOC.\cos C$$
$$= \frac{\pi r^2}{360}\,(a - c.\cos B - b.\cos C),$$

und folglich:

$$Z_a = \tfrac{1}{2}\, r.\frac{a - b.\cos C - c.\cos B}{A + B + C - 180}.$$

Ebenso findet man:

$$Z_b = \tfrac{1}{2}\, r.\frac{b - c.\cos A - a.\cos C}{A + B + C - 180},$$
$$Z_c = \tfrac{1}{2}\, r.\frac{c - a.\cos B - b.\cos A}{A + B + C - 180}.$$

Wenn D_a, D_b, D_c die Abstände des Schwerpunktes des sphärischen Dreieckes ABC von den Ebenen der drei auf den Halbmessern OA, OB, OC senkrechten größten Kreise und F_a, F_b, F_c die Projektionen von F auf diese Ebenen bezeichnen; so lassen sich für D_a, D_b, D_c sehr elegante Ausdrücke finden. —

Zunächst ist:

$$D_a = r.\frac{F_a}{F},\quad D_b = r.\frac{F_b}{F},\quad D_c = r.\frac{F_c}{F}.$$

Ferner sind die Projektionen des sphärischen Dreieckes ABC und des Sektors BOC auf den größten Kreis, dessen Ebene auf OA senkrecht ist, offenbar identisch. Zieht man also den Bogen Aa senkrecht auf BC, so ist:

$$F_a = \text{Fläche des Sektors } BOC.\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A\alpha}{r}\right)$$

$$= \frac{\pi}{360}\, ar^2 \sin\frac{A\alpha}{r} = \frac{\pi}{360}\, ar^2 \sin B\ \sin c.$$

Es ist aber:

$$F = \frac{\pi r^2}{180}\,(A + B + C - 180),$$

folglich:

$$D_a = \tfrac{1}{2} r.\ \frac{a \sin B.\ \sin c}{A + B + C - 180},$$

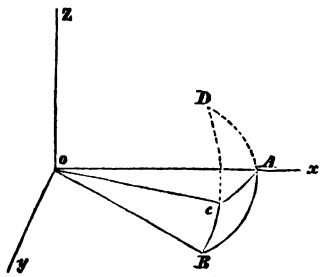
und ebenso:

$$D_b = \tfrac{1}{2} r.\ \frac{b \sin C.\ \sin a}{A + B + C - 180},$$

$$D_c = \tfrac{1}{2} r.\ \frac{c \sin A \sin b.}{A + B + C - 180}.$$

Man kann den Schwerpunkt des sphärischen Dreieckes ABC auch durch drei rechtwinklige Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bestimmen. — Zu dem Zwecke nehme man die Ebene der Seite c zur Ebene der xy und den Halbmesser OA zur Axe der x; so ist nach dem Vorhergehenden sofort:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{2} r.\ \frac{a.\ \sin B \sin c}{A + B + C - 180},\quad \bar{z} = \tfrac{1}{2} r.\ \frac{c - b.\cos A - a.\cos B}{A + B + C - 180}.$$



Ferner treffe der größte Kreis, wozu der Bogen BC gehört, die Ebene der xz in dem Punkte D, und man verbinde A, D durch einen Bogen eines größten Kreises; so ist die Projektion des Dreieckes ABC auf die Ebene der xz offenbar gleich der Differenz der Projektionen der Ausschnitte AOC, BOC auf dieselbe Ebene, also gleich:

$$\frac{\pi}{180}\, r^2 b\, \cos CAD - \frac{\pi}{180}\, r^2 a.\ \cos D$$

$$= \frac{\pi r^2}{180}\,(b \sin A - a \sin B \cos c,$$

und mithin:

$$\bar{y} = \tfrac{1}{2}\,\frac{b \sin A - a \sin B \cos c}{A + B + C - 180}.$$

Aufgabe 193. Man ſoll den geometriſchen Ort der Schwerpunkte aller über der Sehne eines Kreisabſchnittes beſchriebenen Dreiecke finden. —

Aufgabe 194. Den geometriſchen Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke zu finden, welche einerlei Flächeninhalt, dieſelbe Spitze und denſelben Winkel an der Spitze haben. —

Aufgabe 195. Den Schwerpunkt der drei Quadrate über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes zu finden. —

Aufgabe 196. Zwei gleichſchenklige Dreiecke von den Höhen H, h ſtehen auf derſelben Seite derſelben Baſis; man ſoll den Schwerpunkt der zwiſchen den gleichen Seiten liegenden Flächen finden. —

Aufgabe 197. Man ſoll zeigen: daß der Schwerpunkt dreier Gewichte: $a.\ (w - \alpha)^2$, $b.\ (w - \beta)^2$, $c.\ (w - \gamma)^2$, wo w einen beliebigen Werth haben kann, in einer Linie zweiter Ordnung liegt, woran die die Schwerpunkte der drei Gewichte verbindenden geraden Linien Tangenten ſind. —

Aufgabe 198. Wenn die Seiten eines Dreieckes der Reihe nach in demſelben Verhältniß getheilt werden, ſo hat das von den Verbindungslinien der Theilungspunkte gebildete Dreieck denſelben Schwerpunkt, wie das urſprüngliche Dreieck, was bewieſen werden ſoll. —

Aufgabe 199. Welche Form muß ein Dreieck haben, damit der Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes ſein Schwerpunkt iſt? —

Aufgabe 200. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden.

Auflöſung. Denkt man ſich die Pyramide parallel zu der Grundfläche b in unendlich viele unendlich dünne Schichten zertheilt, ſo iſt einleuchtend, daß der Schwerpunkt der Pyramide auf der geraden Linie liegt, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche geht. — Es bezeichne X einen auf der Höhe h in der Entfernung x von der Spitze der Pyramide ſenkrechten Durchſchnitt derſelben, ſo hat man:

$$X : b = x^2 : h^2,$$

folglich:

$$X = \frac{bx^2}{h^2}.$$

Mithin ist:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz} = \frac{\int x\,dv}{\int dv} = \frac{\int_0^h x\,X\,dx}{\int_0^h X\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^h x^3\,dx}{\int_0^h x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{4}h^4}{\frac{1}{3}h^3} = \frac{3}{4}h, \text{ also auch } = \frac{3}{4}l.$$

wo l die Länge der von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche der Pyramide gehenden geraden Linie bezeichnet, worauf $\frac{3}{4}l$ genommen werden muß. —

Für die dreiseitige Pyramide ergibt sich dieses Resultat unmittelbar, wenn man sich an den vier Ecken derselben vier gleiche Gewichte $W_1 = W_2 = W_3 = W_4$ angebracht denkt (vergl. Aufg. 167).

Dasselbe Resultat gilt offenbar auch für den Kegel. —

Aufgabe 201. Den Schwerpunkt einer parallel zu der Grundfläche abgestumpften Pyramide zu finden. —

Auflösung. Es sei y die Höhe der kleinen abgeschnittenen und h die der abgestumpften Pyramide; ferner seien a, b zwei homologe Seiten der großen und kleinen Grundfläche der letztern, so hat man:

$$y + h : y = a : b,$$

also:

$$h : y = a - b : b,$$

folglich:

$$y = \frac{bh}{a-b},$$

und:

$$y + h = \frac{bh}{a-b} + h = \frac{ah}{a-b}.$$

Mithin ist:

$$\bar{x} = \frac{\int_y^{y+h} x^3\,dx}{\int_y^{y+h} x^2\,dx} = \tfrac{3}{4}h.\,\frac{a^4 - b^4}{(a-b)\,(a^3 - b^3)}$$

$$= \tfrac{3}{4}h.\,\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{(a-b)\,(a^2 + ab + b^2)},$$

und folglich:

$$\bar{x} - y = h\left(\frac{3\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{4\,(a-b)\,(a^2 + ab + b^2)} - \frac{b}{a-b}\right)$$

$$= \frac{h}{4}\cdot\frac{3a^3 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}.$$

Wird $b = 0$, so ist $y = 0$ und $\bar{x} = \frac{3}{4}h$. — Wenn $a = b$ wird, so ist $\bar{x} = \frac{1}{2}h$, wie es sein muß. —

Aufgabe 202. Den Schwerpunkt eines ellipsoidischen Abschnittes zu finden. —

Auflösung. Die Gleichung der Oberfläche eines Ellipsoides, dessen drei Halbaxen a, b, c sind, ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und der auf der Axe der x senkrechte Durchschnitt in dem Abstande x vom Anfangs- oder Mittelpunkte des Ellipsoides ist eine Ellipse, deren Gleichung ist:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

und deren Halbaxen sind:

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Die Fläche dieser Ellipse ist also:

$$X = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

und man hat mithin:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,X\,dx}{\int X\,dx} = \frac{\int x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx}{\int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2}}{x - \frac{x^3}{3a^2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a^2x - x^3}{3a^2 - x^2}.$$

Aufgabe 203. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes zu finden.

Auflösung. Wenn die Axe eines Rotationskörpers zur Axe der x genommen wird, so ist bekanntlich das Element dv eines solchen Körpers allgemein $= \pi y^2\,dx$ und sein Volumen $V = \pi \int y^2\,dx$.

Man hat also:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dv}{\int dv} = \frac{\int x\,dv}{V} = \frac{\int x\,y^2\,dx}{\int y^2\,dx}, \qquad (\alpha)$$

oder in Polarcoordinaten (vergl. Aufg. 172 Aufl. 3):

$$\bar{x} = \frac{\iint r^3 \sin\Theta \cos\Theta\,d\Theta\,dr}{\iint r^2 \sin\Theta\,d\Theta\,dr}. \qquad (\beta)$$

Wendet man nun die Formel (α) auf den Kugelabschnitt an, so hat man:

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

folglich:

$$\bar{x} = \frac{\int (2ax^2 - x^3)\,dx}{\int (2ax - x^2)\,dx} = \frac{\frac{2}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{a - \frac{1}{3}x}.$$

Für die Halbkugel ist $x = a$, folglich:

$$x = \frac{5}{8}a.$$

Hieraus ergibt sich auch leicht die Lage des Schwerpunktes des Kugelausschnittes, da die des Schwerpunktes des Kegels bekannt ist (Aufl. 200). —

Aufgabe 204. Den Schwerpunkt eines Rotationsparaboloides zu finden. —

Auflösung. Hier ist:

$$y^2 = 2px,$$

folglich:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, y^2\, dx}{\int y^2\, dx} = \frac{x^3\, dx}{\int x\, dx} = \tfrac{2}{3} x.$$

Für den Schwerpunkt eines abgestumpften Paraboloides zwischen den Grenzen $x = \alpha$, $x = \beta$ hat man also:

$$\bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta x^3\, dx}{\int_\alpha^\beta x\, dx} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta^2 - \alpha^2} = \tfrac{2}{3} \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{\beta + \alpha},$$

also:

$$\bar{x} - \alpha = \frac{2\beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2}{3(\alpha + \beta)} = (\beta - \alpha) \frac{2\beta + \alpha}{3(\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{h}{3} \cdot \frac{2b^2 + a^2}{a^2 + b^2},$$

wo a, b resp. die Halbmesser der großen und kleinen Grundfläche des abgestumpften Paraboloides und h die Höhe desselben bezeichnen. —

Aufgabe 205. Den Schwerpunkt eines geraden Kegels zu finden. —

Auflösung. Wenn a den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels bedeutet, so ist die Gleichung der erzeugenden geraden Linie:

$$y = \frac{a}{h} x,$$

also:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x^3\, dx}{\int_0^h x^2\, dx} = \tfrac{3}{4} h,$$

wie weiter oben, und für den abgestumpften Kegel, dessen große und kleine Grundfläche den Halbmesser a und b haben, erhält man offenbar dasselbe Resultat, wie in Aufg. 201. —

Aufgabe 206. Den Schwerpunkt des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines Kreisausschnittes um einen seiner äußersten Halbmesser entsteht. —

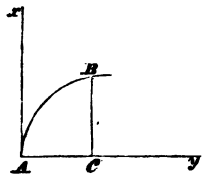
Auflösung. Wenn β den Winkel am Mittelpunkte des Kreisausschnittes und a den Halbmesser desselben bedeutet; so ist nach der Formel (β):

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\beta}\int_0^{a} r^3 \sin\Theta \cos\Theta \, d\Theta \, dr}{\int_0^{\beta}\int_0^{a} r^2 \sin\Theta \, d\Theta \, dr}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^4\int_0^{\beta} \sin\Theta \cos\Theta \, d\Theta}{\frac{1}{3}a^3\int_0^{\beta} \sin\Theta \, d\Theta} = \frac{\frac{1}{8}a^4\int_0^{\beta} \sin 2\Theta \, d\Theta}{\frac{1}{3}a^3\int_0^{\beta} \sin\Theta \, d\Theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}a^4 (1 - \cos 2\beta)}{\frac{1}{3}a^3 (1 - \cos\beta)} = \frac{3}{16}a \frac{1 - \cos 2\beta}{1 - \cos\alpha}$$

$$= \frac{3}{8}a (1 + \cos\beta) = \frac{3}{4} a \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta.$$



Aufgabe 207. Den Schwerpunkt des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung der paraboliſchen Fläche ABC um die Tangente Ax im Scheitel entſteht. —

Auflösung. Es ſeien Ax, Ay die Axen der x und y, alſo:

$$x^2 = 2py$$

die Gleichung der Parabel, und $AC = a$, $BC = b$; ſo iſt:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{b}\int_y^{a} x\,y \, dx \, dy}{\int_0^{b}\int_y^{a} y \, dx \, dy} = \frac{\int_0^{b} (a^2 - y^2)\, x \, dx}{\int_0^{b} (a^2 - y^2)\, dx}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \frac{\int_0^{a} (a^2 - y^2)\, dy}{\int_0^{a} (a^2 y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})\, dy}, \text{ wegen } x\,dx = p\,dy,$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \frac{a^3 - \frac{1}{3}a^3}{2a^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \tfrac{5}{12}\sqrt{a}$$

$$= \tfrac{5}{24}\sqrt{2pa} = \tfrac{5}{24}\, b.$$

Aufgabe 208. Den Schwerpunkt des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung der Fläche der Parabel:

$$y^{m+n} = a^m x^n$$

erzeugt wird. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \frac{m + 3n}{2m + 4n} x.$$

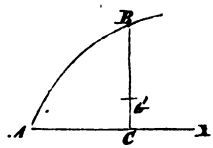
Aufgabe 209. Den Schwerpunkt des Rotationshyperboloides zu finden. —

Auflösung. Wenn

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$$

die Gleichung der Hyperbel ist, durch deren Fläche der Körper erzeugt wird; so findet man:

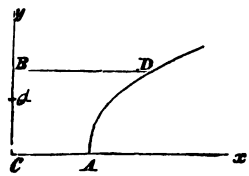
$$\bar{x} = \frac{8ax - 3x^2}{4(3a + x)}.$$



Aufgabe 210. Den Schwerpunkt G des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung der Parabelfläche ABC um die Ordinate BC entsteht. —

Auflösung. Es ist:

$$CG = \bar{y} = \tfrac{5}{16} y.$$



Aufgabe 211. Den Schwerpunkt des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung der hyperbolischen Fläche $ACBD$ um die Axe CB entsteht. —

Auflösung. Man findet:

$$CG = \bar{y} = \tfrac{9}{16} y.$$

Aufgabe 212. Man soll den Schwerpunkt des Körpers finden, welcher durch die Umdrehung der Fläche der Curve:

$$y = (a - x)\frac{x^2}{a^2}$$

um die Axe der x entsteht. —

Auflösung. Man findet:

$$\bar{x} = \frac{140\,a^2x - 240\,ax^2 + 105\,x^3}{168\,a^2 - 280\,ax + 120\,x^2};$$

also für $x = a$, d. h. für den von der ganzen Curvenfläche erzeugten Körper:

$$\bar{y} = \tfrac{5}{8}\,a.$$

Aufgabe 213. Den Schwerpunkt des Körpers zu finden, welcher zwischen den beiden Oberflächen liegt, die durch die Umdrehung der beiden Parabeln:

$$y^2 = lx, \quad y^2 = l'(a - x)$$

um die Axe der x erzeugt werden. —

Auflösung. Man findet:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}\,a.\,\frac{l + 2l'}{l + l'}.$$

Aufgabe 214. Man soll den Schwerpunkt des Stückes des Kegels:

$$y^2 + z^2\,\beta^2\,x^2,$$

finden, welches zwischen den Ebenen der xz, der xy und einer in dem Abstande $= a$ von der Ebene der yz zu ihr gelegten Parallelebene enthalten ist. —

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} \int_0^z x\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \int_0^z dx\,dy\,dz} = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} xz\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} z\,dx\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} x\,(\beta^2x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} (\beta^2x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^a x.\,\frac{1}{4}\pi\,\beta^2x^2\,dx}{\int_0^a \frac{1}{4}\,\pi\,\beta^2x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{16}\,\pi\,\beta^3\,a^4}{\frac{1}{12}\,\pi\,\beta^3\,a^3} = \tfrac{3}{4}\,a.$$

Ferner ist:

$$\int_0^a \int_0^{\beta x} \int_0^z y\,dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^{\beta x} y\,z\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \int_0^{\beta x} (\beta^2 x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\,y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \tfrac{1}{3}\beta^3 x^3\,dx = \tfrac{1}{12}\beta^3 a^4;$$

folglich:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} \int_0^z y\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \int_0^z dx\,dy\,dz} = \frac{\frac{1}{12}\beta^3 a^4}{\frac{1}{12}\pi\beta^3 a^3} = \frac{\beta}{\pi}a,$$

und ebenso ergibt sich:

$$\bar{z} = \frac{\beta}{\pi}a.$$

Aufgabe 215. Den Schwerpunkt der Hälfte des Körpers zu finden, welcher zwischen der Oberfläche einer Halbkugel und der eines Paraboloides von derselben Basis liegt, indem die doppelte Brennpunktsordinate mit dem Durchmesser der Halbkugel zusammenfällt und der Körper von einer durch die Axe gelegten Ebene halbirt wird. —

Auflösung. Man nehme den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Axe des Paraboloides zur Axe der z; die Axe der x sei in der Halbirungsebene auf der der z im Anfangspunkte senkrecht und endlich die Axe der y in diesem Punkte auf dieser Ebene senkrecht; so ist die Gleichung der Oberfläche der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

und die der Oberfläche des Paraboloides:

$$x^2 + y^2 = a\,(a - 2z).$$

Der gesuchte Schwerpunkt liegt irgendwo in der Ebene der yz, und man hat:

$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^{+a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{+a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_{-a}^{+a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{+a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz},$$

wo der Kürze wegen $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $z' = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2 - y^2)$ gesetzt ist. Nun ist aber:

$$\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz = dx\,dy\,(z - z')$$

$$= dx\,dy\,[(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a}(a^2 - x^2 - y^2)],$$

folglich:

$$\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{0}^{y'} dx\,dy\,[(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a}(a^2 - x^2 - y^2)]$$

$$= dx\,[\tfrac{1}{4}\pi\,(a^2 - x^2) - \frac{1}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}],$$

und:

$$\int_{-a}^{+a}\int_{y'}^{y}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-a}^{+a} [\tfrac{1}{4}\pi\,(a^2 - x^2) - \frac{1}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3a}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi a^3 - \tfrac{1}{8}\pi a^3 = \frac{5}{24}\pi a^3.$$

Ferner ist:

$$\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz$$

$$= y\,dx\,dy\,[a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a}(a^2 - x^2 - y^2)],$$

$$\int_0^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{y'} y\,dx\,dy\,[(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3a}(a^2 - x^2 - y^2)]$$

$$= dx\left[-\tfrac{1}{3}(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}(a^2 - x^2)\,y^2 + \frac{1}{8a}y^4\right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= dx\,[\tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8a}(a^2 - x^2)^2],$$

$$\int_{-a}^{+a}\int_0^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{8a}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^2\,dx$$

$$= \tfrac{1}{8}\pi a^4 - \tfrac{2}{15}a^4 = \frac{15\pi - 16}{120}a^4.$$

Weiter iſt:

$$\int_{-a}^{+a} z\,dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{2}\,dx\,dy\,(z^2 - z'^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,dx\,dy\left[(a^2 - x^2 - y^2) - \frac{1}{4a^2}(a^2 - x^2 - y^2)^2\right],$$

$$\int_0^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{2}\int_0^{y'} dx\,dy\left[a^2 - x^2 - y^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 - x^2)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2 - x^2)\,y^2 - \frac{1}{4a^2}y^4\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,dx\left[(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\right.$$

$$- \frac{1}{20a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{3}\,dx\left[(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\right],$$

$$\int_{-a}^{+a}\int_0^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz =$$

$$\tfrac{1}{3}\int_{-a}^{+a}\left[(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{1}{15a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{8}\,\pi a^4 - \tfrac{1}{48}\,\pi a^4 = \tfrac{5}{48}\,\pi a^4.$$

Nach den entwickelten Werthen ist nun endlich:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{120}(15\pi - 16)a^4}{\frac{5}{24}\pi a^3} = \frac{15\pi - 16}{25\pi}\,a,$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{5}{48}\pi a^4}{\frac{5}{24}\pi a^3} = \tfrac{1}{2}\,a.$$

Aufgabe 216. Man soll den Schwerpunkt des achten Theiles einer Kugel finden. —

Auflösung. Es sei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ die Gleichung der Kugeloberfläche, und der Kürze wegen $Z' = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$; so hat man:

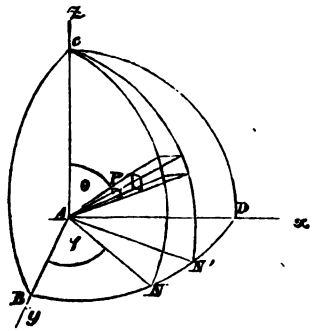
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^{z'} x\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^{z'} dx\,dy\,dz} = \frac{\int_0^a\int_0^{y'} x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^{y'}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^a \frac{\pi}{4}x(a^2 - x^2)\,dx}{\int_0^a \frac{\pi}{4}(a^2 - x^2)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4}{a^3 - \frac{1}{3}a^3} = \tfrac{3}{8}\,a.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\bar{y} = \bar{z} = \tfrac{3}{8}\,a.$$

Da man oft auch Polarcoordinaten mit Vortheil anwenden kann, ſo ſollen die betreffenden Formeln noch angegeben und auf die letzte Aufgabe angewandt werden. —



Es ſei $\angle CAP = \Theta$, $AP = r$ und $\angle BAN = \varphi$, ſo erhellet aus der Figur auf der Stelle: daß die drei zuſammenſtoßenden Kanten des unendlich kleinen Volumenelementes bei P reſp. gleich dr, $rd\Theta$ und $r \sin\Theta\, d\varphi$ ſind; alſo ſein Ausdruck:

$$= r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi,$$

weil daſſelbe als ein Parallelepipedum angeſehen werden kann. —

Ferner iſt offenbar:

$$x = r \sin\Theta \cos\varphi,\quad y = r \sin\Theta \sin\varphi,\quad z = r \cos\Theta;$$

folglich:

$$\bar{x} = \frac{\iiint r^3 \sin^2\Theta \cos\varphi\, dr\, d\Theta\, d\varphi}{\iiint r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint r^3 \sin^2\Theta \sin\varphi\, dr\, d\Theta\, d\varphi}{\iiint r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint r^3 \sin\Theta \cos\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi}{\iiint r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi}.$$

Werden dieſe Formeln auf das letzte Beiſpiel angewandt, ſo hat man:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} r^3 \sin^2\Theta \cos\varphi\, d\varphi\, d\Theta\, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} r^2 \sin\Theta\, d\varphi\, d\Theta\, dr}$$

$$= \frac{3a}{4} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\Theta \cos\varphi\, d\varphi\, d\Theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta\, d\varphi\, d\Theta}$$

$$= \frac{3a}{8} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos\varphi \, d\varphi}{\int_a^{\frac{\pi}{2}} d\varphi} = \frac{3a}{8},$$

und ebenso findet sich:

$$\bar{y} = \frac{3a}{8}, \quad \bar{z} = \frac{3a}{8}.$$

Aufgabe 217. Den Schwerpunkt des achten Theiles eines Ellipsoides zu finden. —

Auflösung. Die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

folglich:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{y'} \int_0^z x \, dx \, dy \, dz}{\int_0^x \int_0^{y'} \int_0^z dx \, dy \, dz} = \frac{\int_0^x \int_0^{y'} xz \, dx \, dy}{\int_0^a \int_0^{y'} z \, dx \, dy},$$

wo $y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ist.

Nun ist aber:

$$\int_0^{y'} z \, dy = c \int_0^{y'} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^{y'} \left[\left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right) - y^2\right]^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} \frac{c}{b} y \left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \frac{c}{b} \left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right) \arcsin \left(\frac{y}{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{y'}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} cy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{bc}{2a} (a^2 - x^2) \arcsin \frac{ay}{b\sqrt{a^2 - x^2}}\right]_0^{y'}$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}(a^2 - x^2);\ \text{also:}$$

$$\int_0^a \int_0^{y'} z\,dx\,dy = \int_0^a \frac{bc\pi}{4a^2}\cdot(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}\left[a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}\cdot\frac{2a^2}{3} = \frac{\pi}{6}abc,$$

und:

$$\int_0^a \int_0^{y'} xz\,dx\,dy = \frac{bc\pi}{4a^2}\int_0^a x(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}\left[\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{\pi a^2 bc}{16}.$$

Es ist also:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{8}a,$$

und ebenso findet man:

$$\bar{y} = \tfrac{3}{8}b,\quad \bar{z} = \tfrac{3}{8}c.$$

Aufgabe 218. Den Schwerpunkt des zwischen den drei Ebenen $x = a$, $y = o$, $z = o$ liegenden Theiles des Paraboloides:

$$y^2 + z^2 = 2px$$

zu finden.

Auflösung. Wenn b den Halbmesser des Durchschnittes des Paraboloides mit der Ebene $x = a$ bezeichnet, so ist:

$$\bar{x} = \tfrac{2}{3}a,\ \bar{y} = \bar{z} = \frac{16b}{15\pi}.$$

Aufgabe 219. Den Schwerpunkt des zwischen den Ebenen $x = o$, $y = o$, $z = o$, $x = a$, $y = b$ liegenden Theiles des Körpers zu finden, dessen Oberfläche durch die Gleichung:

$$z^2 = xy$$

ausgedrückt wird.

Auflösung. Es ist:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{5}a,\ \bar{y} = \tfrac{3}{5}b,\ \bar{z} = \tfrac{9}{32}\sqrt{ab}.$$

Aufgabe 220. Den Schwerpunkt des Theiles des Cylinders:

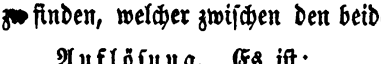
$$y^2 = 2ax - x^2$$

zu finden, welcher zwiſchen den beiden Ebenen $z = \beta x$, $z = \beta' x$ liegt.

Auflöſung. Es iſt:

$$\bar{x} = \tfrac{5}{4} a, \quad \bar{y} = o, \quad \bar{z} = \tfrac{5}{8} (\beta + \beta') a.$$

Aufgabe 221. Den Schwerpunkt einer geraden Linie AB zu finden, wenn ſich die Dichtigkeit ϱ in jedem ihrer Punkte P wie die n^{te} Potenz der Entfernung deſſelben von einem in ihrer Verlängerung gegebenen Punkte C verhält. —



Auflöſung. Es ſei $CA = a$, $CB = b$, $CP = x$, $PQ = dx$ und μ die Dichtigkeit in dem Punkte, deſſen Abſtand von $C = 1$ iſt; ſo iſt die Dichtigkeit ϱ in dem Punkte $P = \mu x^n$, und die Maſſe des Elementes $dx = \mu x^n dx$; folglich die der ganzen Linie AB:

$$= \mu \int_a^b x^n \, dx = \mu . \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \qquad (\alpha)$$

Ferner iſt das Moment von $PQ = dx$ in Beziehung auf den Punkt C:

$$= \mu x^{n+1} \, dx,$$

und folglich das der ganzen Linie in Beziehung auf denſelben Punkt:

$$= \mu \int_a^b x^{n+1} \, dx = \mu . \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}. \qquad (\beta)$$

Man hat demnach:

$$\bar{x} = \frac{\int \varrho x \, ds}{\int \varrho \, ds} = \frac{\int \varrho x \, dx}{\int \varrho \, dx} = \frac{n+1}{n+2} . \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}}.$$

Wenn $n = -1$ iſt, ſo wird (α):

$$\mu \int_a^b x^n \, dx = \mu \int_a^b \frac{dx}{x} = \mu \overset{e}{log}. \frac{b}{a},$$

und (β) wird:

$$\mu \int_a^b x^{n+1} \, dx = \mu \int_a^b dx = \mu (b - a);$$

folglich:

$$\bar{x} = \frac{b-a}{\overset{e}{log.}\ \frac{b}{a}}.$$

Ist $n = -2$, so wird (α):

$$= \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \mu\,\frac{b-a}{ab},$$

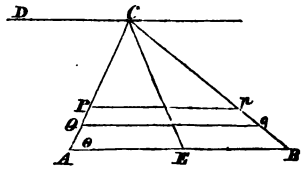
und (β) wird:

$$= \mu\ \overset{e}{log.}\ \frac{b}{a},$$

also:

$$\bar{x} = \frac{ab}{b-a}\ \overset{e}{log}\ \frac{b}{a}.$$

Aufgabe 222. Den Schwerpunkt einer dreieckigen Platte zu finden, wenn ihre Dicke constant ist; aber die Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten sich der n^{ten} Potenz ihres Abstandes von einer durch die Spitze C gehenden Parallele CD zu der Grundlinie AB proportional ändert. —



Auflösung. Es sei $AC = b$, $AB = c$, $CP = x$, $PQ = dx$, $\angle\, CAB = ACD = \Theta$ und μ wieder die Dichtigkeit in der Entfernung $= 1$ von CD; so ist die Dichtigkeit in jedem Punkte von Pp gleich $\mu\,(x\ sin\ \Theta)^n$. Ferner kann man Pq als ein Parallelogramm ansehen, dessen Grundlinie $Pp = \frac{cx}{b}$ und dessen Höhe $= PQ\ sin\ \Theta = dx\ sin\ \Theta$, also dessen Fläche gleich:

$$\frac{cx}{b}\,dx.\ sin\ \Theta,$$

und dessen Masse gleich:

$$\mu\,(x\ sin\ \Theta)^n.\ \frac{c}{b}\ sin\ \Theta.\ x\,dx = \frac{\mu c}{b}\,(x\ sin\,\Theta)^{n+1}\,dx$$

ist. Die Masse des ganzen Dreieckes ABC ist also:

$$\frac{\mu c}{b}\,(sin\ \Theta)^{n+1}\int_0^b x^{n+1}\,dx = \frac{\mu c}{b}(sin\ \Theta)^{n+1}.\ \frac{b^{n+2}}{n+2}$$

$$= \frac{\mu c}{n+2}\,(b\ sin\ \Theta)^{n+1}.$$

Weiter ist das Moment des Elementes Pq in Bezug auf die gerade Linie CD:

$$= \frac{\mu c}{b} (x \sin \Theta)^{n+1} . x \sin \Theta \, dx$$

$$= \frac{\mu c}{b} (x \sin \Theta)^{n+2} \, dx,$$

und folglich das Moment des ganzen Dreieckes ABC in Beziehung auf dieselbe Linie CD:

$$= \frac{\mu c}{b} \int_0^b (x \sin \Theta)^{n+2} \, dx = \frac{\mu c}{b} (\sin \Theta)^{n+2} \frac{b^{n+3}}{n+3}$$

$$= \frac{\mu c}{n+3} (b \sin \Theta)^{n+2}.$$

Wenn also die durch den Schwerpunkt des Dreieckes ABC zu seiner Grundlinie AB gezogene Parallele die Seite CA in dem Abstande $\bar{x}$ von C schneidet, so ist der Abstand dieses Schwerpunktes von CD gleich:

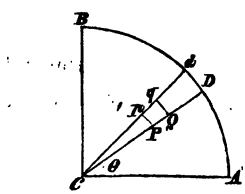
$$\bar{x} \sin \Theta = \frac{\frac{\mu c}{n+3} (b \sin \Theta)^{n+2}}{\frac{\mu c}{n+2} (b \sin \Theta)^{n+1}} = \frac{n+2}{n+3} b \sin \Theta,$$

also:

$$\bar{x} = \frac{n+2}{n+3} b = \frac{n+2}{n+3} AC.$$

Und da der gesuchte Schwerpunkt offenbar auch in der geraden Linie CE liegen muß, welche aus C nach der Mitte von AB geht; so ist seine Lage vollständig bestimmt. —

Aufgabe 223. Den Schwerpunkt eines Viertelkreises ABC zu finden, wenn sich die Dichtigkeit in irgend einem Punkte wie die n^{te} Potenz seines Abstandes vom Mittelpunkte verhält. —



Auflösung. Es sei $CA = a$, $CP = Cp = r$, $Pq = pq = dr$, $\angle DCA = \Theta$, $\angle dCA = \Theta + d\Theta$ und μ wieder die Dichtigkeit für die Einheit des Abstandes von C. Man darf Pq als ein Parallelogramm an-

ſehen, deſſen Seiten $PQ = ds$, $Pp = rd\Theta$ ſind, und deſſen Fläche $= rdr.\, d\Theta$, alſo deſſen Maſſe $= \mu r^n.\, rdr.\, d\Theta$ iſt. —

Die Maſſe des Quadranten CAB iſt folglich:

$$= \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^{n+1}\, dr\, d\Theta = \frac{\mu}{n+2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{n+2}\, d\Theta$$

$$= \frac{\mu}{n+2}\, a^{n+2}\, \Theta .$$

Ferner iſt das Moment des Elementes Pq in Beziehung auf CB offenbar:

$$= \mu r^n.\, rdr.\, r \cos\Theta .\, d\Theta$$
$$= \mu r^{n+2}\, dr \cos\Theta\, d\Theta ;$$

alſo das Moment des ganzen Quadranten in Bezug auf dieſelbe gerade Linie CB:

$$= \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^{n+2}\, dr \cos\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{\mu}{n+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{n+3} \cos\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{\mu}{n+3}\, a^{n+3} \left[\sin\Theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu}{n+3}\, a^{n+3}.$$

Man hat mithin endlich:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\mu}{n+3}\, a^{n+3}}{\frac{\mu}{n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a^{n+2}} = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{2a}{\pi} = \bar{y}.$$

Aufgabe 224. Den Schwerpunkt der Oberfläche einer Halbkugel zu finden, wenn ſich die Dichtigkeit in jedem Punkte derſelben wie die n^{te} Potenz ſeines ſenkrechten Abſtandes von der Grundfläche verhält. —

Auflöſung. Man denke ſich die Oberfläche der Halbkugel als durch Umdrehung eines Quadranten um einen ſeiner äußern Halbmeſſer entſtanden, ſo hat man:

$$\bar{x} = \frac{\int \varrho\, xy\, ds}{\int \varrho\, y\, ds} = \frac{\int x^2\, y\, ds}{\int xy\, ds},$$

weil ϱ proportional x ist. Aus der Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

folgt weiter: $$y\,ds = a\,dx$$

und also ist endlich:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x^2\,dx}{\int_0^a x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{2}{3}a.$$

Aufgabe 225. Den Schwerpunkt einer Halbkugel zu finden, wenn sich die Dichtigkeit in jedem Punkte wie die n^{te} Potenz seines Abstandes vom Mittelpunkte verhält. —

Auflösung. Wenn man Polarcoordinaten anwendet, so ist:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^a r^{n+3} \sin^2\Theta \cos\varphi\,d\varphi\,d\Theta\,dr}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^a r^{n+2} \sin\Theta\,d\varphi\,d\Theta\,dr}$$

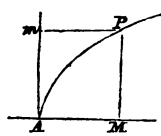
$$= \frac{n+3}{n+4} \cdot \frac{a}{2}.$$

Aufgabe 226. Den Schwerpunkt eines Kegels zu finden, wenn sich die Dichtigkeit in jedem Punkte wie das Quadrat seines Abstandes von einer durch die Spitze des Kegels zu seiner Grundfläche parallel gelegten Ebene verhält. —

Auflösung. Man findet:

$$\bar{x} = \frac{5}{6}x.$$

Aufgabe 227. Das Volumen V des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung der Parabelfläche APM um die Ordinate MP entsteht. —



Auflösung. Man findet leicht:

$$V = \frac{8}{15}\pi x^2 y,$$

während das Volumen V' des durch die Umdrehung des Rechteckes $AMPm$ erzeugten Cylinders gleich

$$V' = \pi x^3 y$$

ist, so daß sich also verhält:

$$V : V' = 8 : 15.$$

Aufgabe 228. Das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers zu finden, welcher durch die volle Umdrehung eines Kreises um eine außerhalb desselben liegende Axe entsteht. —

Auflösung. Wenn b den Abstand des Kreismittelpunktes von der Rotationsaxe und a den Halbmesser des Kreises bezeichnet, so ist:

$$V = 2\pi^2 a^2 b, \quad O = 4\pi^2 ab.$$

Aufgabe 229. Das Volumen V des Ringes zu finden, welcher durch die volle Umdrehung einer Ellipse um eine in ihrer Ebene außerhalb liegende Axe entsteht. —

Auflösung. Wenn a, b die beiden Halbaxen der Ellipse und c den Abstand ihres Mittelpunktes von der Rotationsaxe bezeichnen; so ist:

$$V = \pi^2 abc.$$

Aufgabe 230. Das Volumen V des Körpers zu finden, welcher durch die Drehung β der Parabelfläche AMP (Fig. auf voriger Seite) um die Tangente Am im Scheitel A entsteht. —

Auflösung. Man findet:

$$V = \tfrac{4}{5}\beta x^2 y.$$

Aufgabe 231. Man soll das Volumen V und die Oberfläche O des durch die volle Umdrehung einer Cycloide um ihre Axe erzeugten Körpers bestimmen. —

Auflösung. Wenn a den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet, so ist:

$$V = \pi a^3 (\tfrac{3}{2}\pi^2 - \tfrac{8}{3}), \quad O = 8\pi a^2 (\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Geschieht die Drehung um die Basis, so ist:

$$V = \tfrac{5}{2}\pi^2 a^3, \quad O = \tfrac{32}{3}\pi a^2.$$

Aufgabe 232. Das Volumen V des Körpers zu finden, welcher durch die volle Umdrehung eines rechtwinkligen Dreieckes um seine Hypotenuse entsteht. —

Auflösung. Wenn a, b die beiden Katheten bedeuten, so ist:

$$V = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aufgabe 233. Den Schwerpunkt der Fläche und des Bogens eines Halbkreises nach den Guldin'schen Regeln zu finden. —

Auflösung. Wenn a den Halbmesser bezeichnet, so ist die Fläche des Halbkreises $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, und die Länge seines Bogens $U = \pi a$; und wenn der Halbkreis eine volle Umdrehung um seinen Durchmesser macht; so erzeugt er eine Kugel, deren Volumen $V = \frac{4\pi}{3} a^3$ und deren Oberfläche $O = 4\pi a^2$ ist. Bezeichnet also $\bar{y}$ die Ordinate des Schwerpunktes der Fläche des Halbkreises, so ist nach der ersten Guldin'schen Regel (§. 69):

$$L.A = V,$$

d. h.:

$$2\pi \bar{y}. \tfrac{1}{2}\pi a^2 = \frac{4\pi a^3}{3},$$

folglich:

$$\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Ferner ist, wenn $\bar{y}_1$ die Ordinate des Schwerpunktes des Kreisbogens bezeichnet, nach der zweiten Guldin'schen Regel:

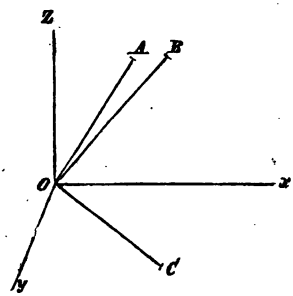
$$L.U = O,$$

d. h.:

$$2\pi \bar{y}_1. \pi a = 4\pi a^2,$$

also:

$$\bar{y}_1 = \frac{2a}{\pi}.$$



Aufgabe 234. Wenn n Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, welche nach Größe und Richtung durch die geraden Linien OA, OB, OC, ... vorgestellt werden, den materiellen Punkt O im Gleichgewichte halten, und es werden in den Punkten $A, B, C, \ldots$ gleiche Gewichte W angebracht; so ist O der Schwerpunkt derselben, was bewiesen werden soll. —

Beweis. Da $P_1, P_2, P_3, \ldots$ im Gleichgewichte sind, so ist (§. 19):

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots = 0,$$
$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 + \ldots = 0,$$
$$P_1 \cos\gamma_2 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 + \ldots = 0;$$

also auch:

$$OA \cos\alpha_1 + OB \cos\alpha_2 + OC \cos\alpha_3 + \ldots = 0,$$
$$OA \cos\beta_1 + OB \cos\beta_2 + OC \cos\beta_3 + \ldots = 0,$$
$$OA \cos\gamma_1 + OB \cos\gamma_2 + OC \cos\gamma_3 + \ldots = 0.$$

d. h.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \Sigma.\ x = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = \Sigma.\ y = 0,$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = \Sigma.\ z = 0,$$

wo $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \ldots$ resp. die Coordinaten der Punkte $A, B, C, \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots$ resp. die Winkel bezeichnen, welche $OA, OB, OC, \ldots$ mit den drei durch O gelegten rechtwinkligen Coordinatenaxen bilden.

Nun ist aber (§. 61):

$$n.\ W.\ \bar{x} = Wx_1 + Wx_2 + Wx_3 + \ldots = W\Sigma.\ x = o,$$
$$n.\ W.\ \bar{y} = Wy_1 + Wy_2 + Wy_3 + \ldots = W\Sigma.\ y = o,$$
$$n.\ W.\ \bar{z} = Wz_1 + Wz_2 + Wz_3 + \ldots = W\Sigma.\ z = o,$$

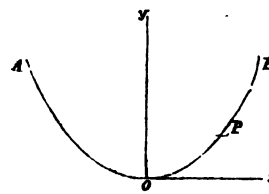
also:

$$\bar{x} = o,\ \bar{y} = o,\ \bar{z} = o;$$

folglich ist O der Schwerpunkt der n Gewichte W, was bewiesen werden sollte. —

Anmerk. Der Schwerpunkt eines Körpers oder Systemes hat noch mehrere andere interessante Eigenschaften, welche wir jedoch der Kürze wegen übergehen müssen. —

Aufgabe 235. Eine vollkommen biegsame Kette ist an zwei in derselben Horizontale liegenden festen Punkten A, B aufgehangen, und die Querschnittsmasse m ändert sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Länge des von dem tiefsten Punkte O aus gezählten Bogens OP; man soll die Gleichung der Kettenlinie finden. —



Auflösung. Wenn μ die Querschnittsmasse in der Entfernung $= c$ vom tiefsten Punkte O bezeichnet, so ist:

$$m = \mu \sqrt{\frac{c}{s}};$$

folglich nach (α) in §. 78, indem man x und y vertauscht:

$$c\frac{dy}{dx} = \int_0^s m\,ds = \mu\sqrt{c}\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\mu\sqrt{c}.\sqrt{s},$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\mu}{\sqrt{c}}\sqrt{s} = \sqrt{\frac{s}{\beta}}, \text{ wo } \frac{2\mu}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ gesetzt ist,}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{s}{\beta},$$

$$\beta\, d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

$$\frac{\beta\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = dx,$$

und integrirt:

$$2\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x + C.$$

Da aber zugleich $x = o$, $\frac{dy}{dx} = o$ sein muß, so ist $C = 2\beta$; folglich:

$$2\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x + 2\beta, \qquad (\alpha)$$

und zum Quadrat erhoben:

$$4\beta^2\frac{dy^2}{dx^2} = (x+2\beta)^2 - 4\beta^2,$$

$$2\beta\, dy = [(x+2\beta)^2 - 4\beta^2]^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

folglich, wenn man integrirt:

$$C + 2\beta y = \tfrac{1}{2}(x+2\beta)(x^2+4\beta x)^{\frac{1}{2}} - 2\beta^2\,\overset{e}{log}\,[x+2\beta+(x^2+4\beta x)^{\frac{1}{2}}].$$

Da aber zugleich $x = o$, $y = o$ sein muß, so ist:

$$C = -2\beta^2 \overset{e}{log}(2\beta),$$

und mithin endlich die gesuchte Gleichung der Kettenlinie:

$$2\beta y = \tfrac{1}{2}(x + 2\beta)(x^2 + 4\beta x)^{\frac{1}{2}} - 2\beta^2 \overset{e}{log} \frac{x + 2\beta + (x^2 + 4\beta x)^{\frac{1}{2}}}{2\beta}.$$

Aus (α) folgt ferner:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x + 2\beta}{2\beta},$$

und folglich ist:

$$T = t.\frac{ds}{dx} = \frac{t}{2\beta}(x + 2\beta).$$

Aufgabe 236. Man soll das Gesetz finden, nach welchem sich m ändert, wenn eine schwere Kette die Form eines Halbkreises annimmt, indem sie an zwei in derselben Horizontale liegenden festen Punkten aufgehangen ist. —

Auflösung. Die Gleichung der Kettenlinie ist demnach:

$$x^2 = 2ay - y^2,$$

also:

$$a^2 - x^2 = (a - y)^2, \quad y = a - (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ferner:

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{a}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

folglich:

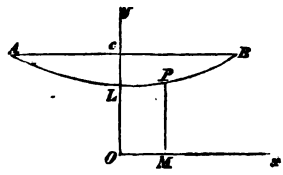
$$m = c\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{ca}{a^2 - x^2} = \frac{ca}{(a - y)^2},$$

d. h. m ändert sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von dem horizontalen Durchmesser des Halbkreises. —

Ferner ist:

$$T = t\frac{ds}{dx} = \frac{ta}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ta}{a - y}.$$

Aufgabe 237. Eine gleichförmig schwere Kette ist an zwei in derselben Horizontale liegenden festen Punkten A, B aufgehangen; man soll die Länge der Kette, den Abstand ihres tiefsten Punktes L von der Horizontale AB, so wie die Richtung ihrer Tangente in A oder B finden, wenn der auf A und B ausgeübte Druck dem ganzen Gewichte der Kette gleich ist. —



Auflösung. Es sei $ALB = l$, $AC = BC = a$, so ist:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right), \qquad (1)$$

$$s = c\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (2)$$

Ferner ist die Spannung in einem beliebigen Punkte P gleich:

$$mgy = \tfrac{1}{2} mcg\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

und folglich die in B gleich:

$$\tfrac{1}{2} mcg\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Nach der Voraussetzung ist aber diese Spannung $= mgl$, also wegen (2) gleich:

$$mcg\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right);$$

folglich:

$$\tfrac{1}{2} mcg\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right) = mcg\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right),$$

und:

$$\tfrac{1}{2} e^{\frac{a}{c}} = \tfrac{3}{2} e^{-\frac{a}{c}},$$

$$e^{\frac{2a}{c}} = 3, \quad \frac{2a}{c} = \overset{e}{log}\, 3, \quad \frac{a}{c} = \tfrac{1}{2} \overset{e}{log}\, 3. \qquad (3)$$

Wegen (2) ist also:

$$l = \frac{2a}{\overset{e}{log}\, 3}\left(3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{4a}{3^{\frac{1}{2}} \overset{e}{log}\, 3}.$$

Setzt man weiter in (1), $x = a$, so ergibt sich:

$$OC = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}} \right);$$

folglich:

$$CL = \left(\tfrac{1}{2} e^{\frac{a}{c}} + \tfrac{1}{2} e^{-\frac{a}{c}} - 1 \right) c$$

$$= \left(\frac{3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}}{2} - 1 \right) \frac{2a}{\log 3}, \text{ wegen (3)}$$

$$= \left(\frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \frac{2a}{\log 3} = \frac{2a}{\log 3} \cdot \frac{2 - 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}.$$

Endlich ist nach (1):

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

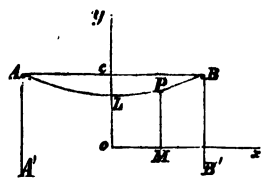
und folglich, wenn φ die Neigung der Kette in B gegen die Horizontale bedeutet:

$$tang\, \varphi = \tfrac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}} \right) = \tfrac{1}{2} \left(3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}};$$

also:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Aufgabe 238. Eine gleichförmig schwere Kette $A'ALBB'$ ist über zwei in derselben Horizontale liegende Bolzen A, B gelegt und im Gleichgewichte; man soll den auf jeden Bolzen ausgeübten Druck finden, wenn die Länge der Kette gegeben ist. —



Auflösung. Die Gleichung der Kettenlinie ist:

$$y = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right), \qquad (1)$$

und die Spannung in irgend einem Punkte P:

$$mgy = \tfrac{1}{2} mcg \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

also die in B:

$$= \tfrac{1}{2}\, mcg \left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right). \qquad (2)$$

Aber diese letzte Spannung ist auch $= mgs'$, wo $BB' = s$ gesetzt ist; folglich hat man:

$$mgs' = \tfrac{1}{2}\, mcg \left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right)$$

oder:

$$s' = \tfrac{1}{2}\, c\left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right). \qquad (3)$$

Wenn ferner $2l$ die Länge der ganzen Kette $A'ALBB'$ bezeichnet, so ist die des Theiles $LBB' = l$ und die von $BL = l - s'$. Es ist also:

$$l - s' = \tfrac{1}{2}\, c\left(e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}\right), \qquad (4)$$

und:

$$(3) + (4) \ldots . \; l = c\, e^{\frac{s}{c}}.$$

Bestimmt man nach dieser letzten Gleichung den Werth von c und setzt denselben in die Gleichung (2), so erhält man die Spannung in B. —

Aus (1) ergibt sich ferner durch Differenzirung:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

und wenn man $LP = s''$ setzt; so ist:

$$s'' = \tfrac{1}{2}\, c\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad \frac{ds''}{dx} = \tfrac{1}{2} c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

folglich:

$$\frac{dy}{ds''} = \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}} = \cos\varphi, \qquad (5)$$

wo $\angle PBB' = \varphi$ gesetzt ist.

Wenn T die Spannung in B und P den Druck auf den festen Punkt B bezeichnet, so ist:

$$P^2 = 2T^2 - 2T^2 \cos\varphi$$
$$= 2T^2 (1 - \cos\varphi),$$

also wegen (2) und (5):

$$P^2 = \tfrac{1}{2} m^2 c^2 g^2 \left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right)\left[1 - \frac{e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}}{e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}}\right]$$

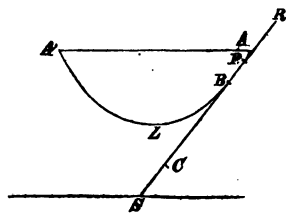
$$= m^2 c^2 g^2 \left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right) e^{-\frac{s}{c}}$$

$$= m^2 c^2 g^2 \left(1 + e^{-\frac{2s}{c}}\right);$$

folglich:

$$P = mcg\left(1 + e^{-\frac{2s}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 230. Eine gleichförmig schwere Kette ABC ist mit dem einen Ende an einem über einer schiefen Ebene RS liegenden festen Punkte A aufgehangen, und man soll die Länge l' des auf dieser Ebene liegenden Stücks BC derselben finden, wenn die Neigung der Kette am Aufhängepunkte A, so wie die der Ebene RS gegen den Horizont und die Länge $ABC = l$ der Kette gegeben ist. —



Auflösung. Es sei φ die Neigung der Curve in irgend einem Punkte P, T die Spannung in B, α, β die Werthe von φ für die Punkte A, B und $LP = s$; so ist nach der Natur der Kettenlinie:

$$T \cos\beta = mcg, \qquad (1)$$

$$s = c \operatorname{tang}\varphi. \qquad (2)$$

Die Spannung in B ist offenbar $= mgl' \sin\beta$, folglich wegen (1):

$$mgl' \sin\beta \cos\beta = mcg,$$

also:

$$c = l' \sin\beta \cos\beta. \qquad (3)$$

Ferner ist wegen (2):

$$LBA = c \operatorname{tang}\alpha, \quad LB = c \operatorname{tang}\beta,$$

folglich:

$$l - l' = c\,(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta),$$

und wegen (3):

$$l - l' = l' \sin\beta \cos\beta\,(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta),$$

$$l \cos\alpha = l' (\cos\alpha + \sin\alpha \sin\beta \cos\beta - \sin^2\beta \cos\alpha),$$
$$= l' \cos\beta \cos(\alpha - \beta),$$
$$l' = \frac{l \cos\alpha}{\cos\beta \cos(\alpha - \beta)}.$$

Aufgabe 240. Die Gleichung der Kettenlinie zu finden, wenn $m = \beta \frac{dx}{ds}$ ist, d. h. die Querschnittsmasse sich wie der Cosinus der Neigung der Curvenelemente gegen die Horizontale ändert. —

Auflösung. Die gesuchte Gleichung ist:

$$x^2 = \frac{2t}{\beta g} y,$$

d. h. die Curve ist eine Parabel. —

Aufgabe 241. Die Gleichung der Kettenlinie zu finden, wenn $m = \beta x \cos\varphi$ ist, wo φ die Neigung der Curvenelemente gegen die Horizontale bezeichnet. —

Auflösung. Setzt man $m = \beta x \frac{dx}{ds}$, so findet man:

$$6 ty = g\beta x^3,$$

d. h. die Curve ist eine kubische Parabel. —

Aufgabe 242. Die Gleichung der Kettenlinie zu finden, wenn $m = \beta x^{\frac{1}{2}} \cos\varphi$ ist. —

Auflösung. Setzt man $m = \beta x^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds}$, so findet man:

$$16 g^2 \beta^2 x^5 = 225 t^2 y^2.$$

Aufgabe 243. Den Ausdruck für m zu finden, wenn die Kettenlinie eine gewöhnliche Parabel ist. —

Auflösung. Man findet:

$$m = \frac{2t}{g(a^2 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

wo a den Parameter der Parabel bedeutet. —

Aufgabe 244. Eine an zwei in derselben Horizontale liegenden festen Punkten aufgehangene Kette bildet eine Cycloide:

$$x = a(\Theta + \sin\Theta), \quad y = a(1 - \cos\Theta);$$

man soll den Ausdruck von m, sowie das Gewicht des zwischen dem

tiefsten und einem beliebigen Punkte der Curve liegenden Bogens derselben finden. —

Auflösung. Wenn w das Gewicht der Kette bezeichnet, so findet man:

$$m = \frac{t\,(sec\,\frac{1}{2}\,\Theta)^3}{4\,ag}, \quad w = t.\ tang\,\tfrac{1}{2}\,\Theta.$$

Aufgabe 245. Eine gleichförmig schwere Kette ist an zwei in derselben Horizontale liegenden Bolzen befestigt, deren gegenseitige Entfernung $= 2\,a$ ist; man soll die Länge l der Kette so bestimmen, daß der Druck auf die Bolzen ein Minimum wird. —

Auflösung. Man findet:

$$e^{\frac{a}{c}} = \left[\frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad l = c\,(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}).$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen muß c abgeleitet werden, und alsdann gibt die zweite den Werth von l. —

Wenn z. B. $2\,a = 10$ Fuß ist, so ist $c = 4{,}168\ldots$ Fuß und $l = 12{,}578\ldots$ Fuß. —

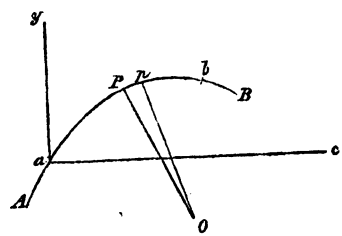
Aufgabe 246. Eine Kette hängt in der Form der durch die Gleichung:

$$a^3\,y = x^4$$

ausgedrückten Curve; man soll bestimmen, in welchem Punkte m ein Maximum wird, so wie den Werth dieses Maximums finden. —

Auflösung. Es ist:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \tfrac{1}{4}a, \quad m = \frac{2\sqrt{3.}\,t}{a\,g}.$$



Aufgabe 247. Ein schwerer biegsamer Faden ab liegt in einer Vertikalebene auf einer Curve APB; man soll für irgend einen Punkt P die Spannung, so wie den Druck auf die Curve finden. —

Auflösung. Es seien P, p zwei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve und PO, pO zwei Normalen, also O der Krümmungsmittelpunkt. Ferner sei $aP = s$, $Pp = ds$, $\angle\, POp$

$= \varphi$, $PO = \varrho$, T die Spannung in P und $T + dT$ die in p, und endlich R die Druckeinheit (d. h. für die Längeneinheit) in P; so hat man, wenn man die auf das Fadenelement $Pp = ds$ wirkenden Kräfte nach der Tangente in P zerlegt:

$$(T + dT)\ \cos\varphi - t = mg\ ds.\ \frac{dy}{ds},$$

d. h. mit Hinweglassung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung:

$$dT = mg\ dy,$$

also: $$T = mgy, \qquad (1)$$

weil für $y = o$ auch $T = o$ ist. —

Zerlegt man die auf das Element $Pp = ds$ wirkenden Kräfte nach der Normale OP, so hat man:

$$mg\ ds.\ \frac{dx}{ds} + (T + dT)\ \sin\varphi = R\ ds;$$

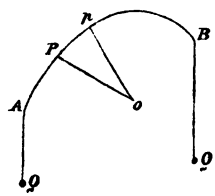
also mit Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung:

$$mg.\ \frac{dx}{ds} + T.\ \frac{\varphi}{ds} = R,$$

folglich wegen $\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ der Druck:

$$R = mg\ \frac{dx}{ds} + \frac{T}{\varrho} = mg\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y}{\varrho}\right).$$

Aufgabe 248. An den beiden Enden eines über eine in einer Vertikalebene liegende glatte Curve APB gelegten biegsamen Fadens sind zwei gleiche Gewichte Q, Q aufgehangen; man soll den auf irgend einen Punkt P der Curve ausgeübten Druck finden, wenn das Gewicht des Fadens nicht in Betracht gezogen wird. —



Auflösung. Es seien PO, pO Normalen in zwei auf einanderfolgenden Punkten P, p, Θ die Neigung von OP gegen irgend eine in der Ebene der Curve liegende feste gerade Linie, $\angle\ POp = d\Theta$, $PO = \varrho$, $AP = s$, $Pp = ds$, p die Druckeinheit auf die Curve in P, T die Spannung des Fadens in P und $T + dT$ die in p; so hat man für das Gleichgewicht des Fadenelementes $Pp = ds$ zwischen den auf der Tangente in P normalen Componenten die Relation:

$$(T + dT)\sin d\Theta = p\,ds = p\varrho\,d\Theta,$$

d. h.:

$$T\,d\Theta = p\varrho\,d\Theta,\quad T = p\varrho. \qquad (1)$$

Weiter hat man zwischen den zu der Tangente in P parallelen Componenten der auf das Element $Pp = ds$ wirkenden Kräfte die Relation:

$$(T + dT)\cos d\Theta - T = o,$$

also:

$$dT = o,\quad T = const.$$

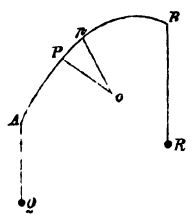
In A ist aber offenbar die Spannung $= Q$, also $T = Q$; mithin wegen (1):

$$Q = p\varrho,\quad p = \frac{Q}{\varrho}.$$

Der Gesammtdruck auf die Curve AB ist offenbar:

$$\int p\,ds = Q\int\frac{ds}{\varrho} = Q\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta = Q\,(\Theta_2 - \Theta_1).$$

Aufgabe 249. Ueber eine in einer Vertikalebene liegende rauhe Curve ist ein biegsamer Faden gelegt, an dessen Enden zwei Gewichte Q, R hängen, wovon R soviel größer ist, als Q, daß sich das System im Grenzzustande des Gleichgewichtes befindet; man soll nun, indem das Gewicht des Fadens unbeachtet bleibt, das Verhältniß $\frac{Q}{R}$ der beiden Gewichte, sowie den auf die Curve ausgeübten Druck bestimmen. —



Auflösung. Es sei μ der gegebene Reibungscoefficient, so ist die auf dem Elemente $Pp = ds$ stattfindende und nahezu nach der Tangente in P gerichtete Reibung $= \mu p\,ds$. Zerlegt man nun die auf das Element $Pp = ds$ wirkenden Kräfte parallel zu PO, so hat man:

$$(T + dT)\sin d\Theta = pds = p\varrho\,d\Theta,$$

folglich:

$$T\,d\Theta = p\varrho\,d\Theta,\quad T = p\varrho, \qquad (1)$$

und die Componenten derselben Kräfte nach der Tangente in P geben:

$$(T + dT)\cos d\Theta - T + \mu p\,ds = o,$$

d. h.:

$$dT + \mu p\, ds = o,$$

also wegen (1):

$$dT + \frac{\mu T}{\varrho} ds = o, \quad \frac{dT}{T} = -\mu . \frac{ds}{\varrho},$$

$$\overset{\circ}{log}\, T = -\mu \int \frac{ds}{\varrho} = -\mu \int d\Theta = C - \mu\Theta. \qquad (2)$$

In A ist aber $T = Q$ und in B ist $T = R$; also:

$$\overset{\circ}{log}\, Q = C - \mu\Theta_1 \text{ und } \overset{\circ}{log}\, R = C - \mu\Theta_2, \qquad (3)$$

folglich:

$$\overset{\circ}{log}\, \frac{Q}{R} = \mu(\Theta_2 - \Theta_1), \quad \frac{Q}{R} = e^{\mu(\Theta_2 - \Theta_1)}.$$

Aus (2) und (3) folgt weiter:

$$\overset{\circ}{log}\, \frac{T}{R} = \mu(\Theta_2 - \Theta), \quad T = R\, e^{\mu(\Theta_2 - \Theta)}, \qquad (4)$$

und mithin ist der Gesammtdruck auf die Curve:

$$\int p ds = \int T \frac{ds}{\varrho} = \int T d\Theta, \text{ wegen (1)}$$

$$= R \int e^{\mu(\Theta_2 - \Theta)}\, d\Theta = C - \frac{R}{\mu}\, e^{\mu(\Theta_2 - \Theta)};$$

aber für $\Theta = \Theta_1$ ist dieser Druck offenbar $= 0$, folglich:

$$0 = C - \frac{R}{\mu}\, e^{\mu(\Theta_2 - \Theta_1)},$$

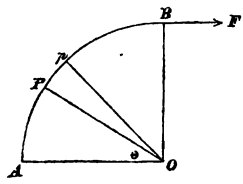
und daher der Gesammtdruck von Θ_1 bis Θ_2 gleich:

$$\frac{R}{\mu}\left(e^{\mu(\Theta_2 - \Theta_1)} - 1\right).$$

Wenn die Curve ein Halbkreis ist, so ist $\Theta_2 - \Theta_1 = \pi$, also:

$$\frac{Q}{R} = e^{\mu\pi}.$$

Aufgabe 250. Ein gleichförmig schwerer Faden liegt auf einem glatten Kreisquadranten APB, dessen einer Halbmesser hori-



zontal und der andere vertikal ist. Man soll die Kraft F finden, welche eben das Herabgleiten des schweren Fadens verhindern kann — und den Druck auf die Curve mit dem Gewichte W des Fadens vergleichen. —

Auflösung. Es sei $OA = a$, $\angle AOP = \Theta$, $\angle POp = d\Theta$, T die Spannung in P und $T + dT$ die in p, p der auf AP und dp der auf Pp ausgeübte Druck; so wird das Fadenelement $Pp = ds$ durch die Spannungen T, $T + dT$, sein Gewicht $ma\,d\Theta$ und durch die Reactionen des Curvenbogens Pp im Gleichgewichte gehalten. Nimmt man nun, um diese Reactionen in den Gleichungen zu vermeiden, die Momente in Bezug auf den Punkt O; so hat man:

$$(T + dT)\,a - Ta - ma\,d\Theta .\, a\cos\Theta = o,$$

also:

$$dT = ma\cos\Theta\,d\Theta,$$
$$T = ma\sin\Theta,$$

weil in A zugleich $T = o$, $\Theta = o$ ist. —

Aber in B ist zugleich $T = F$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$;

folglich:

$$F = ma,$$

d. h. die Kraft F muß wenigstens dem Gewichte einer dem Halbmesser a gleichen Länge des Fadens gleich sein. —

Der Druck dp auf das Curvenelement Pp rührt her von dem Gewichte des entsprechenden Fadenelementes und von den Spannungen T, $T + dT$, und man hat:

$$dp = ma\,d\Theta\sin\Theta + Td\Theta$$
$$= ma\sin\Theta\,d\Theta + ma\sin\Theta\,d\Theta$$
$$= 2\,ma\sin\Theta\,d\Theta.$$

Folglich: $p = -2ma\cos\Theta + C.$

In A ist aber $\Theta = o$ und $p = o$, also $C = 2ma$; folglich:

$$p = 2ma\,(1 - \cos\Theta),$$

und weil in B, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ist; so ist der Druck auf den ganzen Quadranten:

$$p = 2ma,$$

und:

$$\frac{p}{W} = \frac{2ma}{ma\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

Aufgabe 251. Die Kraft F zu finden, wenn der Quadrant nicht glatt, sondern rauh ist. —

Auflösung. Die Kräfte, welche das Fadenelement Pp im Gleichgewichte halten, sind: T, $T + dT$, $\mu\, dp$, $ma\, d\Theta$ und die Normalreactionen der Curve. Wenn man, um letztere in den Gleichungen zu vermeiden, die Momente in Bezug auf den Punkt O nimmt; so hat man:

$$(T + dT).\ a - T.a + \mu\, dp.\ a - ma\, d\Theta\, a\cos\Theta = o,$$

d. h.:

$$\frac{dT}{d\Theta} + \mu\,\frac{dp}{d\Theta} = ma\cos\Theta. \qquad (1)$$

Ferner ist wieder:

$$dp = ma\, d\Theta\sin\Theta + T d\Theta,$$

oder:

$$\frac{dp}{d\Theta} = ma\sin\Theta + T,$$

und diesen Werth von $\frac{dp}{d\Theta}$ in (1) gesetzt:

$$\frac{dT}{d\Theta} + \mu\,(ma\sin\Theta + T) = ma\cos\Theta,$$

oder:

$$\frac{dT}{d\Theta} + \mu T = ma\,(\cos\Theta - \mu\sin\Theta).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{\mu\Theta}$ und integrirt, so ergibt sich:

$$Te^{\mu\Theta} = \frac{2\mu\cos\Theta + (1-\mu^2)\sin\Theta}{1+\mu^2}\, mae^{\mu\Theta} + C.$$

Für $\Theta = o$ ist aber auch $T = o$, also:

$$o = \frac{2\mu}{1+\mu^2}\, ma + C,$$

folglich:

$$C = -\frac{2\mu}{1+\mu^2}\ a.$$

Ferner ist für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ offenbar $T = F$; folglich:

$$Fe^{\frac{\mu\pi}{2}} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} mae^{\frac{\mu\pi}{2}} - \frac{2\mu}{1+\mu^2} ma,$$

und:

$$F = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} ma - \frac{2\mu}{1+\mu^2} mae^{-\frac{\mu\pi}{2}}.$$

Wenn man weiter die Gleichung (1) integrirt, so ergibt sich:

$$T + \mu p = ma \sin\Theta,$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil T, p, Θ zugleich verschwinden. — Aus der letzten Gleichung folgt:

$$p = \frac{ma}{\mu} \sin\Theta - \frac{T}{\mu},$$

und wenn $\Theta = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird; so erhält man den Gesammtdruck auf den Quadranten:

$$= \frac{ma}{\mu} - \frac{F}{\mu} = \frac{ma}{\mu} - \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \cdot \frac{ma}{\mu} + \frac{2ma}{1+\mu^2} \cdot e^{-\frac{\mu\pi}{2}}$$

$$= \frac{2ma}{1+\mu} \left(\mu + e^{-\frac{\mu\pi}{2}}\right).$$

Aufgabe 252. Ein elastischer Faden AC ist mit dem einen Ende an einem festen Punkte aufgehangen und trägt an einem Punkte B ein Gewicht; man soll die Länge dieses Fadens finden, wenn die natürlichen Längen von AB, BC gegeben sind. —

Auflösung. Es sei m die Querschnittsmasse des Fadens in seinem natürlichen Zustande, a, b die natürlichen und a', b' die ausgedehnten Längen von AB, AC, c die Länge des natürlichen Fadens, deren Gewicht dem in B befestigten Gewichte gleich ist, $AP = x$, $Pp = dx$, T die Spannung in P und $T + dT$ die in p; so muß die Masse des Elementes dx nach dem Hooke'schen Satze in dem Verhältnisse von $1 + \lambda T : 1$ vermindert werden, und mithin ist das Gewicht von Pp:

$$= \frac{mg\,dx}{1+\lambda T}.$$

Für das Gleichgewicht von Pp hat man folglich:

$$T + dT + \frac{mg\,dx}{1 + \lambda T} - T = o,$$

d. h.:

$$(1 + \lambda T)\,dT + mg\,dx = o,$$

und integrirt:

$$T\,(1 + \tfrac{1}{2}\lambda T) + mgx = C.$$

Es ist aber offenbar:

$$T = mg\,(a + b + c), \text{ wenn } x = o$$

und:

$$T = mg\,(b + c), \text{ wenn } x = a';$$

folglich:

$$(a + b + c)\,[1 + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,(a + b + c)] = (b + c)\,[1 + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,(b + c)] + a',$$

mithin:

$$\begin{aligned} a' &= a + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,[(a + b + c)^2 - (b + c)^2] \\ &= a + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,(a^2 + 2ab + 2ac) \\ &= a\,[1 + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,(a + 2b + 2c)]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Setzt man ferner $BQ = y$, und die Spannung in $Q = t$, so ist:

$$t\,(1 + \tfrac{1}{2}\lambda t) + mgy = C.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\begin{aligned} t &= mgb, \text{ wenn } y = o, \\ t &= o \quad , \text{ wenn } y = b'; \end{aligned}$$

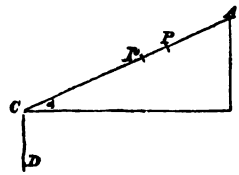
folglich:

$$b' = b\,(1 + \tfrac{1}{2}\lambda mgb). \qquad (2)$$

Wenn also l' die ausgedehnte Länge des elastischen Fadens AC bedeutet, so folgt aus (1) und (2):

$$l' = a + b + \tfrac{1}{2}\lambda mg\,[a\,(a + 2b + 2c) + b^2].$$

Aufgabe 253. Ein elastischer Faden von der natürlichen Länge a liegt auf einer geneigten Ebene von derselben Länge a, und wird blos durch sein eigenes Gewicht gestreckt; man soll die Länge des Stückes desselben finden, welches von der Ebene herabhängt. —



Auflösung. Es sei ACD der Faden, welcher in A an der schiefen Ebene befestigt ist, $AP = x$, $Pp = dx$, m die Querschnittsmasse des unausgedehnten Fadens, T die Spannung in P, $\mathfrak{T}$ die in A, t die in

C und α die Neigung der Ebene AC; so ist die Masse des Fadenelementes $Pp = dx$:

$$\frac{m\,dx}{1 + \lambda T},$$

und für das Gleichgewicht desselben hat man:

$$dT + \frac{mg \sin\alpha}{1 + \lambda T}\,dx = o,$$

$$(1 + \lambda T)\,dT + mg \sin\alpha\,dx = o;$$

folglich:

$$T(1 + \tfrac{1}{2}\lambda T) + mgx \sin\alpha = C.$$

Da ferner $T = t$ ist für $x = a$ und $T = \mathfrak{T}$ für $x = o$; so ist:

$$t(1 + \tfrac{1}{2}\lambda t) + mga \sin\alpha = \mathfrak{T}(1 + \tfrac{1}{2}\lambda\mathfrak{T}),$$

$$(t - \mathfrak{T})[1 + \tfrac{1}{2}\lambda(t + \mathfrak{T})] + mga \sin\alpha = o. \qquad (1)$$

Bezeichnet ferner s die natürliche Länge von CD, so ist $a - s$ die von AC, und man hat offenbar:

$$t = mgs,\quad \mathfrak{T} = mg[s + (a - s)\sin\alpha],$$

also wegen (1):

$$(a - s)\left\{1 + \tfrac{1}{2}\lambda mg[2s + (a - s)\sin\alpha]\right\} = a,$$

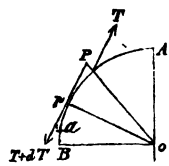
$$\tfrac{1}{2}\lambda mg(a - s)[2s + (a - s)\sin\alpha] = s,$$

und wenn s' die gedehnte Länge von CD bedeutet, so ist leicht zu zeigen, daß:

$$s' = s(1 + \tfrac{1}{2}\lambda mgs)$$

ist. — Es ist also s und s' leicht zu finden. —

Aufgabe 254. Ein sehr wenig ausdehnsamer Faden Aa ist an dem obern Ende A des vertikalen Halbmessers OA eines Kreisbogens AB befestigt, und liegt auf diesem Bogen; man soll die ausgedehnte Länge des Fadens finden, wenn seine natürliche Länge gegeben ist. —



Auflösung. Es sei $AP = s$, $Pp = ds$, $\angle AOP = \varphi$, $\angle POp = d\varphi$, $OA = a$, m die Querschnittsmasse des noch nicht ausgedehnten Fadens, T, $T + dT$ die Spannungen in P und p, s' und ds' die nicht gedehnten Längen von AP und Pp; so ist:

$$ds = (1 + \lambda T)\,ds'. \qquad (1)$$

Die zu der Tangente in P parallelen Componenten der auf das Element Pp wirkenden Kräfte geben für das Gleichgewicht:

$$(T + dT)\cos(d\varphi) + mg\,ds'\sin\varphi = T,$$

d. h.:

$$dT + mgds'\sin\varphi = o,$$

und wegen (1), sowie wegen $s = a\varphi$, $ds = ad\varphi$:

$$(1 + \lambda T)\,dT + mag\sin\varphi\,ds = o$$

und integrirt:

$$T(1 + \tfrac{1}{2}\lambda T) - mag\cos\varphi = C.$$

Bedeutet nun β den Winkel am Mittelpunkte O, welcher dem Bogen Aa entspricht; so ist für $\varphi = \beta$ offenbar $T = o$; folglich:

$$-mag\cos\beta = C,$$

und mithin:

$$T(1 + \tfrac{1}{2}\lambda T) = mag(\cos\varphi - \cos\beta). \qquad (2)$$

Aus (1) folgt, wenn $a\varphi$ für s gesetzt wird:

$$ad\varphi = (1 + \lambda T)\,ds',$$

oder da λ nach der Voraussetzung eine sehr kleine Größe ist:

$$ds' = ad\varphi\,(1 - \lambda T) = ad\varphi - a\lambda T\,d\varphi, \qquad (3)$$

Aus (2) folgt aber annähernd:

$$T = mag(\cos\varphi - \cos\beta),$$

und wenn man diesen Werth von T in (3) setzt:

$$ds' = ad\varphi - ma^2\lambda g(\cos\varphi - \cos\beta)\,d\varphi.$$

Wenn man integrirt, so erhält man:

$$s' + C = a\varphi - ma^2\lambda g(\sin\varphi - \varphi\cos\beta);$$

aber für $\varphi = o$ ist offenbar $s' = o$, also $C = o$; folglich:

$$s' = a\varphi - ma^2\lambda g(\sin\varphi - \varphi\cos\beta).$$

Es sei die natürliche Länge von $Aa = a\beta'$, so ist offenbar:

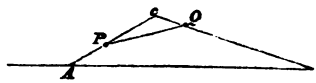
$$a\beta' = a\beta - ma^2\lambda g(\sin\beta - \beta\cos\beta),$$
$$\beta' = \beta - ma\lambda g(\sin\beta - \beta\cos\beta),$$

und da nahezu $\beta = \beta'$ ist; so kann in dem Coefficienten der kleinen Größe λ auch β' für β gesetzt werden, so daß man erhält:

$$\beta = \beta' + mal\mathfrak{g}\,(\sin\beta' - \beta'\cos\beta'),$$

wodurch die gesuchte Länge von Aa bestimmt ist. —

Aufgabe 255. Zwei auf den glatten schiefen Ebenen AC, BC liegende Gewichte P, Q sind durch einen elastischen Faden PQ von der natürlichen Länge $= a$ verbunden; man soll die Gleichgewichtslage finden. —

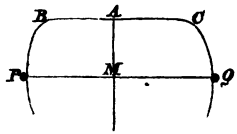


Auflösung. Es seien Θ, α, β resp. die Neigungen von PQ, CA, CB gegen den Horizont; so hat man für die Gleichgewichtslage:

$$tang\,\Theta = \frac{P\cot\beta - Q\cot\alpha}{P+Q}.$$

$$PQ = a\left[1 + \frac{\lambda P\sin\alpha}{\cos(\alpha - \Theta)}\right].$$

Aufgabe 256. Zwei gleiche Gewichte P, Q sind durch einen elastischen Faden PQ verbunden, dessen natürliche Länge der horizontalen geraden Linie CB gleich ist; man soll die Gleichung der Curven BP, CQ finden, worauf die Gewichte stets im Gleichgewichte sind, indem der Faden immer horizontal ist. —

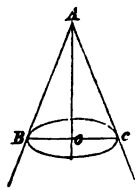


Auflösung. Durch die Mitte A von BC sei AM vertikal gezogen, $AB = AC = a$, $AM = x$, $PM = y = QM$; so ist die Gleichung jeder der beiden Curven BP, CQ:

$$(y - a)^2 = 2la\,Px.$$

Die gesuchten Curven sind also zwei halbe Parabeln, deren Scheitel in B und C liegen. —

Aufgabe 257. Ein schwerer elastischer Ring BC wird über einen geraden Kegel mit einer polirten Oberfläche gelegt; man soll seine Gleichgewichtslage finden. —

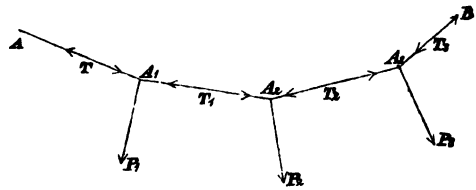


Auflösung. Es sei O der Mittelpunkt des Ringes in seiner Gleichgewichtslage, $\angle\, OAB = \alpha$, die natürliche Länge desselben $= 2\pi a$, und sein Gewicht $= W$; so ist:

$$BO = a\left(1 + \frac{\lambda}{2\pi} W \operatorname{cotg} \alpha\right),$$

wodurch die Gleichgewichtslage bestimmt ist. —

Aufgabe 258. Wenn die Gestalt des Seilpolygones



$AA_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ B$ gegeben ist, die Kräfte $P_1, P_2, \ldots$, so wie die Spannungen T, T_1, T_2, $\ldots$ T_n der einzelnen Seilstücke AA_1, $A_1\ A_2$, $\ldots$ zu finden. —

Auflösung. Wenn α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3, $\ldots$ resp. die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ mit den anstoßenden Seilstücken bilden; so wird der Knoten A_1 durch die 3 Kräfte P_1, T_1, T im Gleichgewichte gehalten, und wenn man dieselben nach der Richtung von P_1 und nach der darauf normalen Richtung zerlegt; so hat man:

$$P_1 - T\cos\alpha_1 - T_1\cos\beta_1 = o\,, \qquad (1)$$
$$T\sin\alpha_1 - T_1\sin\beta_1 = o\,, \qquad (2)$$

Ebenso hat man für das Gleichgewicht des Knotens A_2:

$$P_2 - T_1\cos\alpha_2 - T_2\cos\beta_2 = o\,, \qquad (3)$$
$$T_1\sin\alpha_2 - T_2\sin\beta_2 = o\,, \qquad (4)$$

u. s. f. Ist die Anzahl der Knoten $A_1, A_2, \ldots$ oder die der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gleich n, so erhält man auf diese Weise offenbar $2n$ Gleichungen mit $2n + 1$ unbekannten Größen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, T, T_1, T_2, \ldots T_n$. Wird also T als gegeben angesehen, so hat man nach (2), (4), $\ldots$:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1},\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2},\ \ldots\ \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n};$$

folglich:

$$T_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}T,\ T_2 = \frac{\sin\alpha_1 . \sin\alpha_2}{\sin\beta_1 . \sin\beta_2}T, \text{ u. s. f.}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich ferner durch Elimination von T_1:

$$P_1 = \frac{T' \sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)},$$

und ebenso:

$$P_2 = \frac{T_1 \sin \beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)} = \frac{T' \sin \alpha_1 \sin \beta_2}{\sin \beta_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)} \text{ u. s. f.}$$

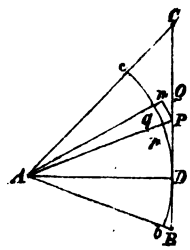
Aufgabe 259. An einem Punkte P einer gleichförmig schweren Kettenlinie APA' ist ein Gewicht W aufgehangen; O, O' sind die tiefsten Punkte zweier gleichförmig schwerer Kettenlinien, wovon AP, $A'P$ Bogen sind, und man soll zeigen: daß W der Differenz, oder der Summe der Gewichte von OP, $O'P$ gleich ist, je nachdem von den beiden Bogen AP, $A'P$ einer, oder jeder kleiner als eine halbe Kettenlinie ist. —

Aufgabe 260. Die Form einer gleichförmig schweren Kette zu finden, deren Enden an zwei Punkten der Oberfläche eines geraden Kegels befestigt sind, und welche auf der Kegeloberfläche ruhet. —

Aufgabe 261. Das eine Ende einer vollkommen biegsamen Kette von gegebener Länge und gegebenem Gewichte ist an einem gegebenen Punkte befestigt und geht über eine der Lage nach gegebene Rolle; welcher Theil der Kette hängt im Gleichgewichtszustande von der Rolle herab? —

Aufgabe 262. Die beiden Enden einer vollkommen biegsamen, aber ausdehnbaren Schnur von gegebener Länge, längs welcher sich ein Gewicht frei bewegen kann, sind an zwei gegebenen Punkten der Oberfläche einer Kugel befestigt; man soll die Gleichgewichtslage des Gewichtes auf der Kugeloberfläche finden. —

Dasselbe zu finden, wenn an die Stelle der Kugel ein gerader Kegel tritt. —



Aufgabe 263. Man soll die Anziehung (Attraction) bestimmen, welche eine gleichförmig dichte und dicke materielle gerade Linie BC auf einen außer ihr liegenden materiellen Punkt A ausübt. —

Auflösung. Es sei AD senkrecht auf BC und Pn senkrecht auf AQ; mit AD werde der Kreisbogen bDc beschrieben. Ferner sei ϱ die Dichtigkeit und ω der Querschnitt der materiellen

geraden Linie CB; so wird die Anziehung, welche das Element PQ derselben auf den Punkt A ausübt nach der Richtung AP, offenbar ausgedrückt durch:

$$\frac{\varrho\omega . \overline{PQ}}{\overline{AP}^2}. \qquad (1)$$

Die ähnlichen Dreiecke APD, PQn geben aber:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{Pn}}{\overline{AD}},$$

und die ähnlichen Dreiecke Apq, APn geben:

$$\frac{\overline{Pn}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{pq}}{\overline{AD}};$$

folglich ist:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}^2} = \frac{\overline{Pn}}{\overline{AD} . \overline{AP}} = \frac{\overline{pq}}{\overline{AD}^2}.$$

Der Ausdruck (1) wird also:

$$\frac{\varrho\omega . \overline{pq}}{\overline{AD}^2};$$

d. h. jedes Element PQ der geraden Linie BC übt auf A dieselbe Anziehung aus, wie das entsprechende Element pq des Kreisbogens bDc, und folglich ist die Anziehung der ganzen Linie BC der des ganzen Kreisbogens bDc gleich; d. h. gleich:

$$\frac{\varrho\omega . \overline{bDc}}{\overline{AD}^2} = \frac{\varrho\omega\, l}{r^2} = \frac{M}{r^2},$$

wenn r, l, M resp. den Halbmesser, die Länge und die Masse des Kreisbogens bedeuten. —

Aufgabe 264. Die Anziehung zu bestimmen, welche eine sehr dünne Kreisscheibe von der Dicke $= h$ auf einen materiellen Punkt ausübt, welcher auf dem in ihrem Mittelpunkte errichteten Perpendikel liegt und um die Länge l von diesem Mittelpunkte entfernt ist. —

Auflösung. Wenn r den Halbmesser und ϱ die Dichtigkeit der Scheibe bezeichnet, so ist die Anziehung, welche ein unendlich

ſchmales ringförmiges Element derſelben auf den fraglichen Punkt ausübt, offenbar gleich:

$$\frac{2\pi\varrho\, k\, l\, r\, dr}{\sqrt{(r^2+l^2)^3}},$$

welche Anziehung nach der Richtung des Perpendikels im Mittelpunkte der Scheibe wirkt. Die Anziehung der ganzen Scheibe wird alſo ausgedrückt durch:

$$\int_0^r \frac{2\pi\varrho\, k\, l\, r\, dr}{\sqrt{(l^2+r^2)^3}} = 2\pi\varrho\, k\left(1-\frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}\right).$$

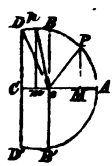
Wenn $r=\infty$ wird, ſo wird die Anziehung $=2\pi\varrho\, k$; d. h. ſie iſt alsdann unabhängig von der Entfernung l des angezogenen Punktes.

Aufgabe 265. Man ſoll die Anziehung A beſtimmen, welche ein Kegel von der Dichtigkeit ϱ, der Höhe l und dem Halbmeſſer r auf einen in ſeiner Spitze liegenden materiellen Punkt ausübt. —

Auflöſung. Wenn der Winkel an der Spitze des Kegels mit 2Θ bezeichnet wird, ſo iſt die Anziehung einer unendlich dünnen zur Grundfläche des Kegels parallelen Schicht deſſelben nach der vorigen Aufg. offenbar $=2\pi\varrho\,(1-\cos\Theta)\,dl$, und folglich die Anziehung des ganzen Kegels:

$$A=2\pi r\,(1-\cos\Theta)\int_0^l dl=2\pi\varrho\,(1-\cos\Theta)\,l.$$

Aufgabe 266. Man ſoll den Punkt O der Axe CA einer Halbkugel DAD' beſtimmen, in welchem ein materieller Punkt unter der Wirkung der Anziehungen der materiellen Punkte der Halbkugel im Gleichgewichte bleibt. —



Auflöſung. Es ſei $CA=a=CD$, $CO=c$, $OB=b$, $OD=b'$, $OP=r$, $OM=x$, $PM=y$, $Op=r'$, $Om=x'$, $pm=y'$, ϱ die Dichtigkeit, A die Anziehung des Theiles BAB' und A' die des Theiles $BDB'D'$ der Halbkugel; ſo iſt nach Aufg. 264. die Anziehung einer der Abſciſſe $x=OM$ entſprechenden, auf der Axe CA ſenkrechten, unendlich dünnen Schicht der Halbkugel gleich:

$$2\pi r\,(1-\tfrac{x}{r})\,dx;$$

folglich:

$$A = 2\pi\varrho \int_0^{a-c} \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx,$$

$$\frac{A}{2\pi\varrho} = a - c - \int_0^{a-c} \frac{x\,dx}{r}. \qquad (1)$$

Ebenso ist:

$$A' = 2\pi\varrho \int_0^{c} \left(1 - \frac{x'}{r'}\right) dx',$$

$$\frac{A'}{2\pi\varrho} = c - \int_0^{c} \frac{x'\,dx'}{r'}. \qquad (2)$$

Nun ist aber offenbar:

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + a^2 - (x + c)^2$$
$$= a^2 - c^2 - 2cx = b^2 - 2cx,$$

also:

$$2cx = b^2 - r^2, \quad c\,dx = -r\,dr,$$

und:

$$\frac{x\,dx}{r} = -\frac{b^2 - r^2}{2c^2}\,dr,$$

mithin nach (1):

$$\frac{A}{2\pi\varrho} = a - c + \frac{1}{2c^2} \int_b^{a-c} (b^2 - r^2)\,dr, \qquad (3)$$

wenn man bemerkt, daß für $x = \begin{cases} a-c \\ c \end{cases}$ resp. ist: $r = \begin{cases} a-c \\ b \end{cases}$.

Weiter ist:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + a^2 - (c - x')^2$$
$$= a^2 - c^2 + 2cx' = b^2 + 2cx',$$

folglich:

$$2cx' = r'^2 - b^2, \quad c\,dx' = r'\,dr',$$

und:

$$\frac{x'\,dx'}{r'} = -\frac{b^2 - r'^2}{2c^2}\,dr';$$

folglich nach (2):

$$\frac{A'}{2\pi\varrho} = c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'} (b^2 - r'^2)\, dr',$$

weil $r = \begin{cases} b' \\ b \end{cases}$ ist, wenn $x'' = \begin{cases} c \\ o \end{cases}$ ist. —

Nun ist aber offenbar:

$$\int_b^{b'} (b^2 - r'^2)\, dr' = \int_b^{b'} (b^2 - r^2)\, dr,$$

also:

$$\frac{A'}{2\pi r} = c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'} (b^2 - r^2)\, dr. \qquad (4)$$

Da endlich der materielle Punkt in O im Gleichgewichte sein soll, so muß $A = A'$ sein, d. h. wegen (3) und (4):

$$a \quad c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{a-c} (b^2 - r^2)\, dr$$

$$= c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'} (b^2 - r^2)\, dr;$$

folglich:

$$a - 2c = \frac{1}{2c^2}\int_{a-c}^{b'} (b^2 - r^2)\, dr.$$

Verrichtet man die Integration und setzt für b' seinen Werth $\sqrt{a^2 + c^2}$, so ergibt sich nach einigen leichten Reductionen:

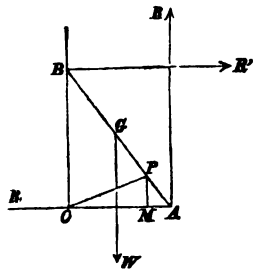
$$a^3 - 4c^3 = (a^2 - 2c^2)\sqrt{a^2 + c^2},$$

und zum Quadrat erhoben:

$$12c^4 - 8a^3c + 3a^4 = 0,$$

aus welcher Gleichung der Werth von c abgeleitet werden muß. Näherungsweise ist $c = \frac{3}{4}a$. —

Aufgabe 267. Ein gleichförmig dichter und dicker Balken AB



stützt sich mit dem einen Ende A auf eine glatte Horizontalebene OA und mit dem andern Ende B gegen eine glatte Vertikalebene OB; in O befindet sich eine Anziehungskraft, deren Intensität sich direkt wie die Entfernung ändert; man soll die Gleichgewichtslage des Balkens finden. —

Auflösung. Es sei Winkel $BAO = \omega$, P irgend ein Punkt des Balkens, $OP = r$, $AP = s$, $AG = BG = a$, $\angle POA = \Theta$ und R, R' seien die Reactionen der Ebenen in A, B; so geben die horizontalen Componenten:

$$R' = \int r\,ds\cos\Theta = \int_0^{2a} \cos\omega\,(2a - s)\,ds = 2a^2\cos\omega; \quad (1)$$

die vertikalen Componenten geben:

$$R - W = \int \sin\Theta\, r\,ds = \int_0^{2a} \sin\omega\, s\,ds = 2a^2\sin\omega, \quad (2)$$

und wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt O nimmt:

$$R.\,2a\cos\omega = W a\cos\omega + R'\,2a\sin\omega,$$

oder:

$$2R\cos\omega = W\cos\omega + 2R'\sin\omega. \quad (3)$$

Substituirt man die aus (1) und (2) gezogenen Werthe von R' und R in (3), so ergibt sich:

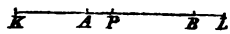
$$2\cos\omega\,(W + 2a^2\sin\omega) = W\cos\omega + 2\sin\omega.\,2a^2\cos\omega;$$

folglich:

$$W\cos\omega = 0, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\pi,$$

d. h. der Balken AB muß mit der Vertikalebene OB in Berührung liegen, wenn er im Gleichgewichte sein soll. — Dies ist jedoch nicht die einzige Gleichgewichtslage des Balkens; denn derselbe ist offenbar auch im Gleichgewichte, wenn er in der horizontalen Ebene liegt und sein eines Ende sich in O befindet. — Bei der Aufstellung der Gleichungen (1), (2) und (3) ist stillschweigend vorausgesetzt: daß die Ebenen nur in den Endpunkten A, B auf den Balken

einen Druck ausüben, welche Voraussetzung offenbar nur in der ersten, und nicht in der zweiten Gleichgewichtslage stattfindet, weshalb unsere Rechnung von den beiden zulässigen Werthen o und $\frac{1}{2}\pi$ von α auch blos den letzten gegeben hat. —



Aufgabe 268. Ein gleichförmig dichter und dicker Balken AB wird auf die Verbindungslinie zweier Kraftmittelpunkte K, L gelegt, welche im direkten Verhältnisse der Entfernung anziehen; man soll die Gleichgewichtslage des Balkens finden. —

Auflösung. Es sei P irgend ein Punkt des Balkens AB, $KA = x$, $LB = y$, $KP = s$, $BP = s'$, $AB = 2a$, $KL = l$, ϱ die Dichtigkeit des Balkens, ω sein Querschnitt und μ, μ' die Intensitäten der Anziehungsmittelpunkte K, L für die Einheit der Entfernung; so muß für das Gleichgewicht des Balkens sein:

$$\int_x^{x+2a} \varrho\,\omega\,\mu\,s\,ds = \int_y^{y+2a} \varrho\,\omega\,\mu'\,s'\,ds'$$

oder:

$$\mu \int_x^{x+2a} s\,ds = \mu' \int_y^{y+2a} s'\,ds',$$

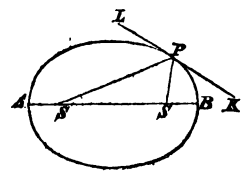
d. h.:

$$\mu\,[(x+2a)^2 - x^2] = \mu'\,[(y+2a)^2 - y^2]$$
$$\mu\,(x+a) = \mu'\,(y+a) = \mu'\,(l-a-x),$$
$$(\mu+\mu')\,x = \mu'\,l - (\mu+\mu')\,a,$$
$$x = \frac{\mu' l}{\mu+\mu'} - a,$$

und ebenso:

$$y = \frac{\mu l}{\mu+\mu'} - a.$$

Der Werth von x oder y bestimmt offenbar die Gleichgewichtslage. —



Aufgabe 269. Auf der Oberfläche eines glatten länglichen Ellipsoides befindet sich ein materieller Punkt P und wird gegen die Brennpunkte S, S' mit Kräften angezogen, welche sich wie SP^m, $S'P^{m'}$ verhalten; man soll die Gleichgewichtslage des materiellen Punktes P finden.

Auflösung. Es sei KPL eine Tangente an der Durchschnittsellipse des Ellipsoides mit einer durch die drei Punkte S, P, S' gelegten Ebene, $SP = r$, $S'P = r'$ und μ, μ' die Intensitäten der Anziehungskräfte in S, S' für die Einheit der Entfernung; so geben die nach der Tangente KPL zerlegten Kräfte für das Gleichgewicht von P:

$$\mu r^m \cos SPK = \mu' r'^{m'} \cos S'PL,$$

oder:

$$\mu r^m = \mu' r'^{m'},$$

weil nach der Natur der Ellipse bekanntlich $\angle SPK = S'PL$ ist. Es ist aber auch $2a = r + r'$, wo $AB = 2a$ gesetzt ist; folglich hat man zur Bestimmung von r und r' die beiden Gleichungen:

$$\mu r^m = \mu' (2a - r)^{m'}, \quad \mu (2a - r')^m = \mu' r'^{m'}.$$

Aufgabe 270. Man hat ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten gleichförmig dichte und dicke materielle Linien bilden, deren Punkte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung anziehen; man soll den Winkel an der Spitze so bestimmen: daß ein materieller Punkt P im Gleichgewichte bleibt, wenn er sich in dem Punkte befindet, welcher die Höhe des Dreieckes in einem gegebenen Verhältnisse theilt. —

Auflösung. Wenn a den Abstand des materiellen Punktes P von der Spitze und b seinen Abstand von der Grundlinie des Dreieckes bezeichnet, so muß der Winkel an der Spitze sein:

$$= 2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right).$$

Aufgabe 271. Zwei auf einander senkrechte materielle gerade Linien AB, AC ziehen den im Endpunkte des von A auf BC gefällten Perpendikels AP befindlichen materiellen Punkt P im umgekehrten Verhältniß des Quadrates der Entfernung an; man soll die Größe und Richtung der Kraft bestimmen, welche den materiellen Punkt P im Gleichgewichte hält. —

Auflösung. Es sei $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$ und μ die Intensität der Anziehungskraft für die Einheit der Entfernung und Länge; so muß die Richtung der gesuchten Kraft mit AB einen Winkel von 45° bilden, und ihre Größe muß gleich sein:

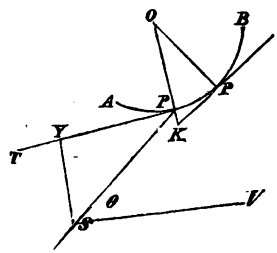
$$\frac{\sqrt{2\mu}\, c^3}{a^2\, b^2}\,.$$

Aufgabe 272. Die Seiten eines Dreieckes sind homogene materielle gerade Linien, deren Punkte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung anziehen, und innerhalb des Dreieckes befindet sich ein materieller Punkt P; man soll die Relationen finden, welche zwischen den von P auf die Seiten des Dreieckes gefällten Perpendikeln a, b, c und den Winkeln α, β, γ stattfinden müssen, welche die von P nach den Ecken des Dreieckes gezogenen geraden Linien mit einander bilden, damit der materielle Punkt P im Gleichgewichte ist. —

Auflösung. Die gesuchten Relationen sind:

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha} : \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\beta} : \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\gamma}\,.$$

Aufgabe 273. Man soll die Gleichung der Curve finden, welche ein vollkommen biegsamer Faden (Kette) unter der Wirkung einer anziehenden Centralkraft bildet.



Auflösung. Es sei APB ein beliebiges Stück dieses Fadens, S der Mittelpunkt der Anziehungskraft, P irgend ein Punkt des Fadens, PT eine Tangente an diesem Punkte, SY ein Perpendikel von S auf PT, p ein dem Punkte P unendlich naheliegender Punkt des Fadens und pK eine Tangente in p, OP die Normale in P und Op die in p, so daß O der Krümmungsmittelpunkt und OP der Krümmungshalbmesser für den Punkt P ist. Ferner sei $OP = \varrho$, $SP = r$, $SY = p$, $\angle SPT = \varphi$, $\angle KOp = \psi$, m die Querschnittsmasse in P, T die Spannung in P, $T + dT$ die in p, $Pp = ds$ und F die Centralkraft in S; so hat man für das Gleichgewicht des Fadenelementes Pp, wenn man die darauf wirkenden Kräfte rechtwinklig gegen PT zerlegt:

$$F m\, ds \sin\varphi = (T + dT)\, \cos pkO = (T + dK)\, \sin\psi,$$

oder wenn man nur unendlich kleine Größen erster Ordnung beibehält:

$$F m\, ds \sin\varphi = T.\psi = T.\frac{ds}{\varrho};$$

also:

$$F m \sin\varphi = \frac{T}{\varrho}. \qquad (a)$$

Ferner geben die zu PT parallelen Componenten:

$$F m\, ds \cos\varphi = (T + dT) \sin OKp - T$$
$$= (T + dT) \sin\psi - T,$$

oder unendlich kleine Größen höherer Ordnung hinweggelassen:

$$F m\, ds \cos\varphi = dT,$$

und wegen $ds \cos\varphi = dr$ folglich:

$$F m\, dr = dT. \qquad (b)$$

Wegen $\varrho = -r\frac{dr}{dp}$ und $\sin\varphi = \frac{p}{r}$ folgt aus (a):

$$F m \frac{dr}{dp} + \frac{dp}{p} T = 0,$$

und mithin aus (b):

$$\frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} = 0,$$

also:

$$\overset{\circ}{\log}(pT) = \overset{\circ}{\log} C,$$

wo C eine willkürliche Constante ist.

Man hat also für die Gleichung der Kettenlinie zwischen p und r, wenn die Form von F gegeben ist:

$$p = \frac{C}{T} = \frac{C}{\int T m\, dr}. \qquad (c)$$

Wenn Θ den Winkel PSV bezeichnet, welchen SP mit irgend einer gegebenen Richtung SV bildet; so ist:

$$p = \frac{r^2 d\Theta}{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\Theta^2)}},$$

und folglich wegen (c), wenn $\int F m\, dr = R$ gesetzt wird:

$$R r^2 d\Theta = C\sqrt{(dr^2 + r^2 d\Theta^2)},$$

oder:

$$R^2 r^4 d\Theta^2 = C^2 (dr^2 + r^2 d\Theta^2);$$

also endlich:

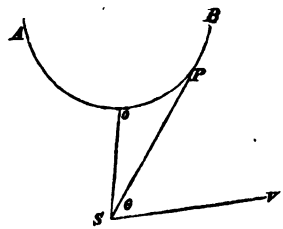
$$d\Theta = \frac{C\,dr}{r\sqrt{R^2 r^2 - C^2}}, \qquad (d)$$

welches die Differenzialgleichung zwischen r und Θ der Ketten- oder Fadenlinie ist, wie sie Joh. Bernoulli angegeben hat. —

Die Spannung T ergibt sich aus (b), sobald F als Function von r gegeben ist. —

Wenn die Centralkraft statt attractiv, repulsiv ist, so muß überall $-F$ statt F gesetzt werden. —

Aufgabe 274. Die Form der Kettenlinie zu finden, wenn die Centralkraft eine anziehende ist, ihre Intensität im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht und m constant ist. —



Auflösung. Es sei S der Mittelpunkt der Kraft, SO der Radiusvector, welcher die Curve AOB rechtwinklig durchschneidet, t die Spannung in O, $SO = c$ und k die Anziehung für die Entfernung c; so ist:

$$R = \int F m\,dr = \int k\,\frac{c^2}{r^2}\,m\,dr = C' - \frac{mkc^2}{r},$$

wo C' eine willkürliche Constante ist. Aber nach (b) ist $T = R$; folglich:

$$t = C' - mkc,$$

und:

$$T = R = t + mkc - \frac{mkc^2}{r}. \qquad (e)$$

Nach (d) ist also:

$$d\Theta = \frac{C\,dr}{r\left[\left(t + mkc - \frac{mkc^2}{r}\right)^2 r^2 - C^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Aber nach (c) ist wegen $p = c$ und $T = t$ für den Punkt O offenbar $C = ct$; folglich:

$$d\Theta = \frac{ct\,dr}{r\left[\left(t + mkc + \frac{mkc^2}{r}\right)^2 r^2 - c^2 t^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $t = nmkc$, so ist:

$$d\Theta = \frac{nc\,dr}{r\left[\left(n + 1 - \frac{c}{r}\right)^2 r^2 - n^2 c^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{nc\,dr}{r\left[(n+1)^2 r^2 - 2(n+1)cr + c^2 - n^2 c^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (f)$$

Die Gleichung der Kettenlinie, welche sich durch Integration dieser Differenzialgleichung ergibt, nimmt drei verschiedene Formen an, jenachdem $n >$, $=$ oder < 1 ist.

Für $n > 1$ und unter der Annahme: daß $\Theta = 0$ ist für $r = c$, ist das Integral der Gleichung (f);

$$r = \frac{(n-1)\,c}{n\cos\left[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Theta}{n}\right] - 1}.$$

Für $n = 1$ und unter derselben Voraussetzung ist die Gleichung der Kettenlinie:

$$r = \frac{c}{1 - \Theta^2}.$$

Für $n < 1$ und in der gleichen Voraussetzung ist die Gleichung:

$$e^{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Theta}{n}} + e^{-(1-n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Theta}{n}} = \frac{2}{nr}\,[r(1-n)\,c].$$

Ferner ist nach (c) wegen $C = ct$:

$$p = \frac{ct}{T},$$

nnd mithin wegen (e):

$$p = \frac{ct}{t - mkc - \frac{mkc^2}{r}} = \frac{nc}{n + 1 - \frac{c}{r}}.$$

Setzt man hierin $r = \infty$, so erhält man:

$$p = \frac{nc}{n+1},$$

woraus erhellet: daß die den drei Werthen von n entsprechenden drei Kettenlinien alle in der Entfernung $\frac{nc}{n+1}$ vom Mittelpunkte der Anziehungskraft Asymptoten haben.

Setzt man in den Gleichungen der drei Curven $r = \infty$, so ergibt sich für die Neigungen der beiden Asymptoten jeder Curve gegen den Radiusvector SO:

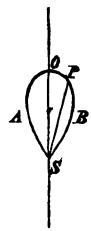
$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{n}, \quad \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \overset{e}{log} \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}.$$

Aufgabe 275. Man soll die Gleichung einer gleichförmig dicken und dichten Kettenlinie AOB (Fig. auf S. 248.) finden, wenn sich die Intensität der von S ausgehenden Anziehungskraft wie die μ^{te} Potenz der Entfernung verhält, und die Spannung in O ein $\frac{1}{1+\mu}$ des Gewichtes einer Länge SO der Kette ist, indem auf jedes Element dieser Länge eine constante Kraft wirkt, welche der Anziehung von S auf O gleich ist. —

Auflösung. Wenn die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe beibehalten werden, so ist die gesuchte Gleichung:

$$\left(\frac{c}{r}\right)^{\mu+2} = \cos(\mu+2)\Theta.$$

Aufgabe 276. Die Gleichung einer gleichförmigen Kettenlinie $SAOB$ zu finden, wenn ihre beiden Enden in dem Mittelpunkte S einer abstoßenden Kraft befestigt sind, deren Intensität sich umgekehrt wie die μ^{te} Potenz der Entfernung verhält, indem die Spannung in O ein $\frac{1}{\mu-1}$ des Gewichtes einer Länge SO der Kette ist, wenn auf jedes Element dieser Länge eine constante Kraft wirkt, welche der Abstoßung von S auf O gleich ist. —



Auflösung. Wenn die Bezeichnungen die frühern bleiben, so ist die gesuchte Gleichung:

$$\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu-2} = \cos(\mu - 2)\,\Theta.$$

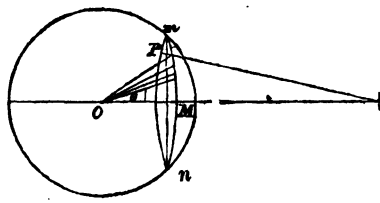
Aufgabe 277. Auf einen materiellen Punkt wirken zwei Anziehungskräfte, deren Intensitäten sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhalten; man soll die Gleichung der Fläche finden, auf welcher der materielle Punkt unter der Wirkung der beiden Centralkräfte in jeder Lage im Gleichgewichte bleibt. —

Auflösung. Es seien μ, μ' die Intensitäten der beiden Centralkräfte für die Einheit der Entfernung, r, r' zwei gleichzeitige Abstände des materiellen Punktes von den beiden Kraftmittelpunkten und a, a' gegebene Werthe von r, r'; so ist die gesuchte Gleichung:

$$\frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} = \frac{\mu}{a} + \frac{\mu'}{a'}.$$

Aufgabe 278. Man soll die Anziehung bestimmen, welche eine sehr dünne homogene Kugelschale von der Dichtigkeit ϱ auf einen außerhalb derselben liegenden materiellen Punkt ausübt. —

Auflösung. Es sei O der Mittelpunkt der Kugelschale, P irgend ein materieller Punkt und dr die Dicke derselben, C der angezogene Punkt, $OC = c$, $\angle POC = \Theta$, $OP = r$, $mPMn$ eine auf OC senkrechte Ebene, $\angle mMP = \varphi$ und $PC = y$. Die Gesammtanziehung, welche die Kugelschale auf den Punkt C ausübt, ist offenbar nach OC gerichtet. Wenn sich ferner OP in der Ebene MOP um O durch den unendlich kleinen Winkel $d\Theta$ drehet, so beschreibt P den Weg $r\,d\Theta$, und wenn sich die Ebene OPM um OC durch den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ drehet; so ist der von P beschriebene Raum $= r \sin\varphi\, d\varphi$, und da dr die Dicke der Kugelschale ist; so ist das Massenelement derselben bei P gleich $\varrho\, r\, d\Theta.\ r \sin\Theta\, d\varphi.\ dr. = \varrho r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi$. Wird ferner die Anziehung der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung zur Anziehungseinheit genommen, so wird die Anziehung, welche das Massenelement bei P auf den Punkt C nach PC ausübt, ausgedrückt durch:



$$\frac{\varrho\, r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi}{y^2},$$

und folglich die Anziehung, welche P auf C nach OC ausübt, durch:

$$\frac{\varrho\, r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi}{y^2} \cdot \frac{c - r\cos\Theta}{y}. \qquad (\mu)$$

Nun ist aber:

$$y^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos\Theta,$$

folglich:

$$\sin\Theta\, d\Theta = \frac{y\, dy}{cr} \text{ und } c - r\cos\Theta = \frac{y^2 + c^2 - c^2}{2c},$$

und wenn man diese Werthe in (μ) substituirt; so wird die Anziehung von P auf C nach OC ausgedrückt durch:

$$\frac{\varrho\, r\, dr}{2c^2}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right) dy\, d\varphi.$$

Die Anziehung A, welche die ganze Kugelschale auf den materiellen Punkt C nach der Richtung CO ausübt, ist mithin:

$$\frac{\varrho\, r\, dr}{2c^2}\int_{c-r}^{c+r}\int_{0}^{2\pi}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right) dy\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}\int_{c-r}^{c+r}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right) dy$$

$$= \frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}(2r + 2r) = \frac{4\pi\varrho\, r^2\, dr}{c^2}$$

$$= \frac{\text{Masse der Kugelschale}}{\text{Quadrat der Entfernung}}.$$

Hieraus erhellet: daß die Kugelschale den außerhalb derselben liegenden materiellen Punkt C gerade so anzieht, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. — Auch eine massive Kugel, welche entweder homogen ist, oder aus homogenen concentrischen Kugelschichten besteht, zieht einen außer ihr liegenden materiellen Punkt ebenso an, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, und ist folglich $= \frac{\text{Masse}}{(\text{Entfernung})^2}$; also für einen auf der Oberfläche liegenden Punkt:

$$= \tfrac{4}{3}\pi\varrho.\, a,$$

wo a den Halbmeſſer der Kugel bezeichnet. —

Aufgabe 279. Die Anziehung zu beſtimmen, welche eine ſehr dünne homogene Kugelſchale auf einen innerhalb derſelben liegenden materiellen Punkt ausübt. —

Auflöſung. Wenn man ganz wie bei der vorhergehenden Auflöſung verfährt; aber $r - c$ und $r + c$ für die Grenzen von y nimmt, ſo erhält man für die geſuchte Anziehung:

$$\frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}\int_{r+c}^{r-c}\left(1 - \frac{r^2 - c^2}{y^2}\right) dy = \frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}(2c - 2c) = 0.$$

Der materielle Punkt befindet ſich alſo innerhalb der Kugelſchale in jeder Lage im Gleichgewichte, wenn keine andere Kraft, als die Anziehung der Kugelſchale auf ihn wirkt. —

Aufgabe 280. Man ſoll die Anziehung beſtimmen, welche eine maſſive Kugel auf einen in ihr liegenden materiellen Punkt ausübt.—

Auflöſung. Es ſei d die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der Kugel, und man denke ſich eine concentriſche Kugelfläche von dem Halbmeſſer d; ſo hat die abgeſchnittene Kugelſchale nach der vorigen Aufg. auf die Anziehung keinen Einfluß, ſo daß man blos die Anziehung der Kugel von dem Halbmeſſer d zu nehmen hat, welche nach Aufg. 278. gleich $\frac{4}{3}\pi\varrho.\, d$ iſt; d. h. ſie iſt der Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel proportional. —

Aufgabe 281. Man ſoll die Anziehung beſtimmen, welche eine ſehr dünne homogene Kugelſchale auf einen außerhalb derſelben liegenden materiellen Punkt ausübt, wenn das Anziehungsgeſetz allgemein durch $\varphi(y)$ ausgedrückt wird, indem y wieder die Entfernung bezeichnet. —

Auflöſung. Wenn man ganz ähnlich wie in Aufg. 278. verfährt, ſo erhält man für die geſuchte Anziehung:

$$\frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}\int_{c-r}^{c+r}(y^2 + c^2 - r^2)\,\varphi(y)\, dy,$$ und theilweiſe integrirt:

$$= \frac{\varrho\pi\, r\, dr}{c^2}\left[(y^2 + c^2 - r^2)\int\varphi(y)\, dy - 2\int\left(y\int\varphi(y)\, dy\right) dy\right]$$

$$= \frac{\pi\varrho\, r\, dr}{c^2}\Big[(y^2 + c^2 - r^2)\,\varphi'(y) - 2\,\psi(y) + const.\Big]_{c-r}^{c+r}$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \left[\frac{c+r}{c}\varphi'(c+r) - \frac{1}{c^2}\psi(c+r) \right.$$

$$\left. \frac{c-r}{c}\varphi'(c-r) + \frac{1}{c^2}\psi(c-r)\right]$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{\psi(c+r) - \psi(c-r)}{c}\right].$$

Aufgabe 282. Die Anziehung A einer sehr dünnen homogenen Kugelschale auf einen in ihr liegenden materiellen Punkt zu finden, wenn das Anziehungsgesetz allgemein durch $\varphi(y)$ ausgedrückt wird.

Auflösung. Verfährt man wie in der letzten Aufgabe, nur mit dem Unterschiede: daß man $r - c$, $r + c$ für die Grenzen von y nimmt; so erhält man:

$$A = 2\pi\varrho\, r\, dr \left[\frac{r+c}{c}\varphi'(r+c) - \frac{1}{c^2}\psi(r+c) \right.$$

$$\left. + \frac{r-c}{c}\varphi'(r-c) + \frac{1}{c^2}\psi(r-c)\right]$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{\psi(r+c) - \psi(r-c)}{c}\right].$$

Beispiel 1. Es sei $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, so ist $\varphi'(r) = -\frac{1}{r} + C$,

$$\psi(r) = -r + \frac{C}{2}r^2 + C',$$

wo C, C' willkürliche Constanten sind.

Folglich ist die von der Kugelschale auf einen äußern Punkt ausgeübte Anziehung:

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{-4r + C[(c+r)^2 - (c-r^2)]}{2c}\right]$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{-2r}{c} + 2Cr\right]$$

$$= \frac{4\pi\varrho\, r^2\, dr}{c^2}, \text{ wie Aufg. 278.}$$

und die auf einen innern Punkt ausgeübte Anziehung:

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{-4c + C[(r+c)^2 - (r-c)^2]}{2c}\right]$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}[-2 + 2Cr] = 0, \text{ wie Aufg. 279.}$$

Beispiel 2. Es sei $\varphi(r) = r$, so ist:

$$\varphi'(r) = \frac{r^2}{2} + C, \quad \psi(r) = \frac{r^4}{8} + \frac{C}{2} r^2 + C',$$

und folglich die von der Kugelschale auf einen äußern materiellen Punkt ausgeübte Anziehung:

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{(c+r)^4 - (c-r)^4}{8c} + \frac{4C[(c+r)^2 - (c-r)^2]}{8c}\right]$$

$$= 2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}[c^2 r + r^3 + 2Cr]$$

$$= 4\pi\varrho\, r^2\, dr.\, c = \text{Masse der Kugelschale} \times \text{Entfernung};$$

d. h. die Anziehung ist dieselbe, als wenn die Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre. —

Aufgabe 283. Man soll bestimmen, bei welchen Anziehungsgesetzen es gestattet ist: sich die Masse einer Kugelschale bei der Berechnung ihrer Anziehung auf einen äußern Punkt in ihrem Mittelpunkte concentrirt zu denken? —

Auflösung. Es sei $\varphi(r)$ das Anziehungsgesetz und $\psi(r) = \int [r \int \varphi(r)\, dr]\, dr$, so hat man unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen für die Anziehung der im Mittelpunkte concentrirten Masse der Kugelschale:

$$4\pi\varrho\, r^2\, dr\, \varphi(c)$$

und für die der nicht concentrirten Masse derselben Schale:

$$2\pi\varrho\, r\, dr \frac{d}{dc}\left[\frac{\psi(c+r) - \psi(c-r)}{c}\right].$$

Da nun beide Anziehungen einander gleich sein sollen, so hat man die Gleichung:

$$2r\varphi(c) = \frac{d}{dc}\left[\frac{\psi c + (r) - \psi(c-r)}{c}\right]$$

$$= 2\,\frac{d}{c}\left[\frac{d\psi(c)}{dc}\cdot\frac{r}{c} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\,\psi(c)\,r^3}{dc^3\,c} + \ldots\right]$$

$$= 2r\,\varphi(c) + 2\,\frac{d}{dc}\left[\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\,\psi(c)}{dc^3}\,\frac{r^3}{c} + \ldots\right].$$

Es ist also für jeden Werth von r:

$$\frac{d}{dc}\left[\frac{r}{c}\cdot\frac{d^3\,\psi(c)}{d^3} + \ldots\right] = 0;$$

folglich:

$$\frac{d}{dc}\left[\frac{1}{c}\cdot\frac{d^3\,\psi(c)}{dc^3}\right] = 0,\quad \frac{d}{dc}\left[\frac{1}{c}\cdot\frac{d^5\,\psi(c)}{dc^5}\right] 0, \ldots. \qquad (\mu)$$

Es ist aber:

$$\frac{d\,\psi(c)}{dc} = c\int\varphi(c)\,dc,\quad \frac{d^2\,\psi(c)}{dc^2} = \int\varphi(c)\,dc + c\,\varphi(c),$$

$$\frac{d^3\,\psi(c)}{dc^3} = 2\varphi(c) + c\,\frac{d\,\varphi(c)}{dc},\ \ldots.$$

Nach der ersten der Bedingsgleichungen (μ) ist also:

$$\frac{2}{c}\,\varphi(c) + \frac{d\,\varphi(c)}{dc} = 3C,$$

und wenn man mit c^2 multiplicirt und dann integrirt:

$$c^2\,\varphi(c) = Cc^3 + C',$$

also:

$$\varphi(c) = Cc + \frac{C'}{c^2}, \qquad (\nu)$$

wo die Constanten C, C' unabhängig sind von c.

Die Bedingung (ν) genügt auch allen übrigen der Bedingungen μ. Folglich sind die gesuchten Anziehungsgesetze:

1) das, wo sich die Stärke der Anziehungskraft direkt wie die Entfernung verhält,
2) das, wo sich diese Stärke umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, und
3) das, wo theils das eine und theils das andere Gesetz stattfindet. —

Aufgabe 284. Nach welchem Gesetze müssen die materiellen Theilchen einer Kugelschale anziehen, wenn ein in ihr liegender materieller Punkt in jeder Lage im Gleichgewichte bleiben soll?

Auflösung. In diesem Falle muß für jeden Werth von c sein:

$$\frac{d}{dc}\left[\frac{\psi(r+c)-\psi(r-c)}{c}\right]=0,$$

also:

$$\frac{d\psi(r)}{dr}+\frac{c^2}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\psi(r)}{dr^3}+\ldots=-C,$$

wo C eine von c unabhängige Constante ist; folglich:

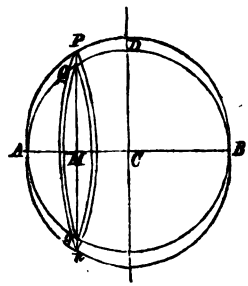
$$\frac{d\psi(r)}{dr}=-C,\quad \frac{d^3\psi(r)}{dr^3}=0,\ \ldots. \qquad (\alpha)$$

Die Bedingungen (α) werden aber alle erfüllt, wenn die erste es ist, d. h. wenn:

$$r\int\varphi(r)\,dr=-C,\ \text{also:}\ \varphi(r)=\frac{C}{r^2},$$

d. h. das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist. —

Aufgabe 285. Man soll die Anziehung bestimmen, welche ein abgeplattetes Sphäroid von sehr kleiner Ellipticität e auf einen unter seinem Pole befindlichen materiellen Punkt ausübt, wenn das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist. —



Auflösung. Es seien $APBp$, $AQBq$ die Durchschnitte des Sphäroides und der dasselbe von innen berührenden Kugel mit einer durch die Axe des erstern gelegten Ebene, $AM=x$, $MP=y$, $AC=c$, $CD=a$, $c=a(1-e)$, wo e eine sehr kleine Größe ist; so ist die Masse des zwischen der Kugel und dem Sphäroide liegenden Ringes Pp von der Dicke dx gleich:

$$\pi\varrho y^2\,dx\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right);$$

ferner:

$$AQ=\sqrt{2cx},\quad y^2=\frac{a^2}{c^2}(2cx-x^2),$$

und wenn man alle Theilchen des Ringes Pp als von dem Pole A gleichweit entfernt ansieht; so ist die Anziehung, welche dieser Ring

auf einen in A befindlichen materiellen Punkt nach der Richtung AB ausübt, gleich:

$$\pi\varrho\, y^2\, dx\,(1-\frac{c^2}{a^2}).\,\frac{1}{2cx}\cdot\frac{x}{\sqrt{2cx}}=\frac{2\pi\varrho\, e}{(2c)^{\frac{3}{2}}}\,(2cx^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx,$$

und folglich die Anziehung des Unterschiedes der Kugel und des Sphäroides

$$=\frac{2\pi\varrho\, e}{(2c)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_0^{2c}(2cx^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx.$$

$$=2\pi\varrho\, e\left(\frac{4c}{3}-\frac{4c}{5}\right)=\frac{16\pi\varrho\, e\, c}{15}.$$

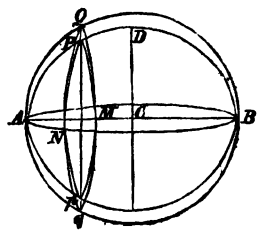
Die Anziehung, welche die Kugel auf einen in A befindlichen materiellen Punkt ausübt, ist aber nach Aufg. 280. gleich $\frac{4\pi\varrho\, c}{3}$, und folglich ist die Anziehung des Sphäroides auf denselben materiellen Punkt:

$$=\frac{4\pi\varrho}{3}\,(1+\frac{4e}{5})\,c.$$

Wenn $c>a$, d. h. das Sphäroid länglich ist, so ist e negativ, und folglich seine Anziehung auf einen unter seinem Pole befindlichen materiellen Punkt:

$$=\frac{4\pi\varrho}{3}\,(1-\frac{4e}{5})\,c.$$

Aufgabe 286. Man soll die Anziehung bestimmen, welche ein abgeplattetes Sphäroid von sehr geringer Ellipticität e auf einen unter seinem Aequator befindlichen materiellen Punkt A ausübt, wenn das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist. —



Auflösung. Es sei DC die Drehungsaxe, $AQBq$ der Durchschnitt der um das Sphäroid beschriebenen Kugel und $APBp$ der des Sphäroides mit einer durch die Drehungsaxe gelegten Ebene, $AC=a$, $CD=c$, A der Anfangspunkt der Coordinaten und AB die Axe der x; so ist die Gleichung der erzeugenden Ellipse:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Denkt man sich ferner auf der Axe der x zwei einander unendlich naheliegende senkrechte Ebenen, welche den Abscissen x und $x + dx$ entsprechen; so ist die zwischen diesen Ebenen liegende Masse der Kugel:

$$= \pi\varrho \frac{a^2}{c^2} y^2 \, dx$$

und die zwischen denselben Ebenen liegende Masse des Sphäroides:

$$= \pi\varrho . \frac{a}{c} y^2 \, dx;$$

folglich die Differenz beider:

$$= \pi \left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c}\right) \varrho \, y^2 \, dx$$

$$= \pi\varrho \left(1 - \frac{c}{a}\right)(2ax - x^2)\, dx$$

$$= \pi\varrho \, e \, (2ax - x^2) \, dx.$$

Nun ist aber die Entfernung jedes Theilchens dieser Masse von A nahezu $= AQ = \sqrt{2ax}$, und folglich seine Anziehung auf den materiellen Punkt A nach der Axe der x gleich:

$$\pi\varrho \, e . \frac{2ax - x^2}{2ax} \cdot \frac{x}{\sqrt{2ax}} dx$$

$$= \frac{\pi\varrho \, e}{2a\sqrt{2a}} (2ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) \, dx;$$

also die Anziehung des ganzen außerhalb des Ellipsoides liegenden Theiles der Kugel:

$$= \frac{\pi\varrho \, e}{2a\sqrt{2a}} \int_0^{2a} (2ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) \, dx$$

$$= \frac{8\pi\varrho \, a \, e}{15}.$$

Da endlich die Anziehung der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}\pi\varrho \, a$ ist, so ist folglich die des Sphäroides:

$$= \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, a - \tfrac{2}{15}\pi\varrho\, e\, a = \frac{4\pi\varrho}{3}\left(1 - \frac{2e}{5}\right) a = \frac{4\pi\varrho}{3}\left(1 + \frac{3e}{5}\right) c.$$

Wenn $c > a$ ist, so ist das Sphäroid **länglich**, also e **negativ** und folglich die Anziehung des länglichen Sphäroides auf einen unter seinem Aequator befindlichen materiellen Punkt:

$$= \frac{4\pi\varrho}{3}\left(1 - \frac{3e}{5}\right) c.$$

Aufgabe 287. Man soll Formeln zur Berechnung der Anziehung ableiten, welche eine beliebige Masse auf einen nicht zu ihr, oder zu ihr gehörigen materiellen Punkt ausübt. —

Auflösung. Es seien f, g, h die Coordinaten des angezogenen Punktes und A, B, C die auf denselben von der betrachteten Masse nach den Axen der x, der y, der z ausgeübten Anziehungen; so hat man offenbar:

$$A = \iiint \frac{\varrho\,(f-x)\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \iiint \frac{\varrho\,(g-y)\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \iiint \frac{\varrho\,(h-z)\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

wo die Grenzen der Integrale durch die Gleichung der Oberfläche des anziehenden Körpers bestimmt werden. —

Ferner sei:

$$V = \iiint \frac{\varrho\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

so ist offenbar:

$$A = -\frac{dV}{df}, \quad B = -\frac{dV}{dg}, \quad C = -\frac{dV}{dh},$$

$$\frac{d^2V}{df^2} = \iiint \frac{\varrho\,[2(f-x)^2 - (g-y)^2 - (h-z)^2]\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^2V}{dg^2} = \iiint \frac{\varrho\,[2(g-y)^2 - (f-x)^2 - (h-z)^2]\,dx\,dy\,dz}{[(f-x^2) + (g-y^2) + (h-z)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \iiint \frac{\varrho\,[2(h-z)^2 - (f-x)^2 - (g-y)^2]\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]^{\frac{5}{2}}};$$

folglich:

$$\frac{d^2V}{df^2}+\frac{d^2V}{dg^2}+\frac{d^2V}{dh^2}$$

$$=\iiint\frac{0.\,dx\,dy\,dz}{[(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (\alpha)$$

Wenn der angezogene materielle Punkt nicht zu der anziehenden Masse gehört, so können x, y, z resp. nie gleich f, g, h werden; folglich ist das dreifache Integral stets $= 0$, und mithin:

$$\frac{d^2V}{df^2}+\frac{d^2V}{dg^2}+\frac{d^2V}{dh^2}=0. \qquad (1)$$

Wenn aber der angezogene Punkt zu der anziehenden Masse gehört, so findet die Gleichung (1) nicht mehr statt, weil die Größe unter dem Integralzeichen in (α) für $x=f$, $y=g$, $z=h$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. —

Um in diesem Falle den Werth des ersten Theiles der Gleichung (1) zu bestimmen, denke man sich um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben, welche den angezogenen Punkt in sich schließt, so zerfällt V in zwei Theile U, U', wovon sich U auf die Kugel, und U' auf die außerhalb derselben liegende Masse bezieht, für welche man hat:

$$\frac{d^2U'}{df^2}+\frac{d^2U'}{dg^2}+\frac{d^2U'}{dh^2}=0,$$

weil der angezogene Punkt nicht zu ihr gehört. Es ist folglich:

$$\frac{d^2V}{df^2}+\frac{d^2V}{dg^2}+\frac{d^2V}{dh^2}=\frac{d^2U}{df^2}+\frac{d^2U}{dg^2}+\frac{d^2U}{dh^2}.$$

Nun sind aber $-\frac{dU}{df}$, $-\frac{dU}{dg}$, $-\frac{dU}{dh}$ die Anziehungen, welche die Kugel nach den Axen der x, der y, der z auf den materiellen Punkt ausübt; folglich nach Aufg. 280:

$$\frac{dU}{df}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho f,\quad \frac{dU}{dg}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho g,\quad \frac{dU}{dh}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho h,$$

also:

$$\frac{d^2U}{df^2}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho,\quad \frac{d^2U}{dg^2}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho,\quad \frac{d^2U}{dh^2}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho,$$

und mithin endlich:

$$\frac{d^2V}{df^2} + \frac{d^2V}{dg^2} + \frac{d^2V}{dh^2} = -4\pi\varrho. \qquad (2)$$

Beiſpiel 1. Man ſoll vermittelſt der Formel (1) die Anziehung einer Kugel auf einen außerhalb derſelben liegenden Punkt beſtimmen. —

Auflöſung. Es ſei der Mittelpunkt der Kugel der Anfangspunkt der Coordinaten, und $c^2 = f^2 + g^2 + h^2$; ſo bleibt die Anziehung wegen der ſymmetriſchen Form der Kugel offenbar dieſelbe, ſo lange c denſelben Werth behält. Folglich iſt V blos eine Funktion von c, und nur mittelbar eine Funktion von f, g, h. Man hat alſo:

$$\frac{dV}{df} = \frac{dV}{dc}\cdot\frac{dc}{df} = \frac{dV}{dc}\cdot\frac{f}{c},$$

$$\frac{d^2V}{df^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{dV}{dc} + f\cdot\frac{d}{df}\left(\frac{\frac{dV}{dc}}{c}\right)$$

$$= \frac{d^2V}{dc^2}\cdot\frac{f^2}{c^2} + \frac{1}{c}\cdot\frac{dV}{dc} - \frac{dV}{dc}\cdot\frac{f^2}{c^2}.$$

Ebenſo findet man:

$$\frac{d^2V}{dg^2} = \frac{d^2V}{dc^2}\cdot\frac{g}{c^2} + \frac{1}{c}\cdot\frac{dV}{dc} - \frac{dV}{dc}\cdot\frac{g^2}{c^2},$$

und:

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{d^2V}{dc^2}\cdot\frac{h^2}{c^2} + \frac{1}{c}\cdot\frac{dV}{dc} - \frac{dV}{dc}\cdot\frac{h^2}{c^2}.$$

Es iſt mithin endlich:

$$\frac{d^2V}{df^2} + \frac{d^2V}{dg^2} + \frac{d^2V}{dh^2} = 0 = \frac{d^2V}{dc^2} + \frac{2}{c}\cdot\frac{dV}{dc}.$$

Multiplicirt man mit c^2, integrirt einmal, und dividirt dann durch c^2; ſo ergibt ſich die Anziehung der Kugel:

$$= -\frac{dV}{dc} = \frac{A}{c^2}.$$

Beiſpiel 2. Vermittelſt der Formel (2) die Anziehung zu beſtimmen, welche eine Kugel auf einen in ihr liegenden materiellen Punkt ausübt. —

Auflöſung. Hier hat man:

$$\frac{d^2V}{dc^2} + \frac{2}{c} \cdot \frac{dV}{dc} = -4\pi\varrho,$$

und wenn man mit c^2 multiplicirt und hierauf integrirt:

$$c^2 \frac{dV}{dc} = A - \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, c^3.$$

Aber für $c = 0$ ist $\frac{dV}{dc} = 0$, folglich $A = 0$, und mithin die gesuchte Anziehung:

$$= -\frac{dV}{dc} = \tfrac{4}{3}\varrho\pi\, c.$$

Beispiel 3. Vermittelst der Formel (1) die Anziehung zu bestimmen, welche ein Cylinder von unendlicher Länge auf einen außer ihm liegenden materiellen Punkt ausübt. —

Auflösung. Wegen der symmetrischen Form und der unendlichen Länge des Cylinders ist einleuchtend: daß die Anziehung dieselbe bleibt, so lange die Entfernung c des angezogenen Punktes von der Axe des Cylinders dieselbe bleibt. — Nimmt man also diese Axe für die der z, so ist $c^2 = f^2 + g^2$ und V blos eine Funktion von c, worin f, g nur mittelbar durch c vorkommen, aber h gar nicht. Die Gleichung (1) reducirt sich also auf:

$$\frac{d^2V}{df^2} + \frac{d^2V}{dg^2} = 0.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d^2V}{df^2} = \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{f}{c^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc} - \frac{dV}{dc} \cdot \frac{f^2}{c^3},$$
$$\frac{d^2V}{dg^2} = \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{g^2}{c^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc} - \frac{dV}{dc} \cdot \frac{g^2}{c^3};$$

folglich:

$$\frac{d^2V}{df^2} + \frac{d^2V}{dg^2} = \frac{d^2V}{dc^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc} = 0.$$

Multiplicirt man mit c und integrirt alsdann, so erhält man für die gesuchte Anziehung:

$$-\frac{dV}{dc} = \frac{A}{c};$$